This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06644336 1

# THÉORIE MÉCANIQUE

DE

# LA CHALEUR

# THÉORIE MÉCANIQUE

DE

# LA CHALEUR

PAR

AL. GOUILLY

INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES — AGRÉGÉ DES SCIENCES
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE CENTRALE

J.-D. & Cie

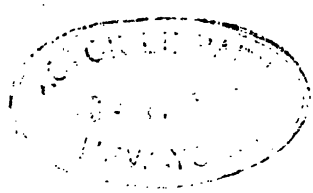
PARIS

J. DEJEY ET Cie, IMPRIMEURS-ÉDITEURS

de l'École centrale des Arts et Manufactures, de la Société des anciens Elèves des Écoles nationales d'Arts et Métiers et de l'Association polytechnique

18, rue de la Perle, 18

1877



# AVIS

Il y a plusieurs traités importants de la théorie mécanique de la chaleur, il faut donc dire pourquoi nous faisons paraître celui-ci. L'auteur s'est proposé de réunir dans un cadre de peu d'étendue tout ce qui est nécessaire à l'étude de la chaleur considérée comme équivalente au travail. Il n'y a donc ici aucune question se rattachant soit à l'électricité, soit au magnétisme.

Dans une première partie se trouve le résumé des connaissances acquises par la physique expérimentale.

Pour la théorie elle-même, l'auteur s'appuie exclusivement sur le théorème connu des forces vives. Il s'attache à montrer l'importance des méthodes employées dans l'étude de la chaleur, et il écarte les questions dont les démonstrations sont vagues ou incomplètes, et qui ne servent pas encore d'ailleurs à l'application la plus importante, l'étude des machines.

A la fin du volume on trouve des notes sur les infiniment petits, notes qu'on fera bien de lire tout d'abord.

La lecture de la table de ce traité complétera ces explications.

# ERRATA

Page 2, 15e ligne, à partir du bas, à la fin, supprimer dé-

— 8, 12e — à partir du bas, lire « à celles qui » au lieu de « à celle qui »

— 16, 1re — du haut, lire « aspérités » au lieu de « aspérité »

— 16, 8e — à partir du bas, lire « état » au lieu de « l'état »

# TABLE

## PREMIÈRE PARTIE

### RÉSUMÉ DES RÉSULTATS DE LA PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE SUR LA CHALEUR ET SUR LES CHANGEMENTS D'ÉTATS


*Chapitre Ier. — De la température*

Nos 1. Equilibre de température. — 2. Constatation de la température. — 3. Choix d'un thermomètre

*Chapitre II. — De l'état des corps*

Nos 6. Elasticité dans les solides. — 7. Elasticité dans les gaz. — 10. Dilatation des solides et des liquides. — 11. Dilatation des gaz. — 12. Fusion. — 13. Solidification. — 14. Ebullition. — 15. Vapeurs. — 19. Etat d'un corps.

*Chapitre III. — Des quantités de chaleur*

Nos 21. De la chaleur considérée comme grandeur. — 22. Calorie. — 24. Chaleurs spécifiques. — 25. Capacités calorifiques à volume constant pour les gaz. — 26. Chaleurs latentes. — 27. Chaleur de vaporisation de l'eau. — 28. Equivalence du travail et de la chaleur (frottement). — 29. Chaleur dégagée dans le changement d'état des corps. — 30. Compression et expansion des gaz. — 31. Equivalent mécanique de la chaleur. — 32. Capacités calorifiques à volume constant pour les gaz.

*Chapitre IV. — Expression de la quantité de chaleur nécessaire pour un changement d'état.*

Nos 33. Conclusion des chapitres précédents. — 34. Capacité calorifique à volume constant. — 35. Chaleur latente de dilatation. — 36. Chaleur spécifique à pression constante. — 37. Chaleur latente relative à la variation de pression. — 40. Quantité de chaleur nécessaire pour un changement d'état infiniment petit quelconque. — 43. Relation entre les chaleurs spécifiques et les chaleurs latentes. — 44. La quantité de chaleur nécessaire à une transformation infiniment petite n'est pas une différentielle exacte. — 45. Loi de la détente des gaz parfaits quand ils ne dégagent et ne reçoivent pas de chaleur (Loi de Poisson).


## DEUXIÈME PARTIE

### LES DEUX THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR


*Chapitre Ier. — Application du théorème des forces vives à un système matériel placé dans l'éther.*

Nos 46. De l'éther. — 48. Travail des forces intérieures (fonction des forces). — 51. — Evaluation des forces vives. — 52. Influence du mouvement vibratoire sur la fonction des forces. — 53. Application du théorème des forces vives à un système matériel placé dans l'éther (énergie). — 56. Application à l'objet principal de la thermodynamique.

*Chapitre II. — Premier théorème de la thermodynamique : Équivalence de la chaleur et du travail*

N$^{os}$ 58. Equivalent mécanique de la chaleur. Expériences de M. Joule. — 59. Expériences de M. Hirn.

Applications du premier théorème

N$^{os}$ 61. Relations entre l'énergie intérieure d'un corps, les capacités calorifiques et les chaleurs latentes. — 64. Relations de M. Clausius. — 67. Relations entre les chaleurs latentes et les capacités calorifiques. — 68. Tableau des formules déduites du premier théorème. — 69. Application aux gaz parfaits.

*Chapitre III. — Deuxième théorème fondamental de la thermodynamique ou théorème de Carnot*

Etude des transformations d'un corps

N$^{os}$ 76. — Représentation géométrique des transformations d'un corps. — 77. Lignes des transformations principales pour les gaz parfaits. — 78. Du facteur qui rend $dQ$ différentielle exacte. — 80. Lignes des transformations principales pour des corps quelconques. Propriétés de ces lignes. — 85. Transformations réversibles. Cycles. Cycle de Carnot.

Deuxième théorème principal de la thermodynamique ou théorème de Carnot

N$^{os}$ 87. Théorème de Carnot. — 88. Remarque sur la démonstration de ce théorème.

Application du deuxième théorème fondamental.

N$^{os}$ 89. Détermination de la fonction d'intégrabilité. — 91. Equation de W. Thomson. — 94. Quantité de chaleur nécessaire pour une transformation suivant une ligne isotherme. — 95. Equation de Rankine. — 96. Tableau des formules déduites du deuxième théorème.

## TROISIÈME PARTIE

### APPLICATION DES DEUX THÉORÈMES FONDAMENTAUX

*Chapitre I$^{er}$. — Généralités sur les machines à feu — Machines à gaz*

N$^{os}$ 97. Généralités. Rendement d'une machine. — 99. Régénérateur de chaleur. — 102. Machine à gaz fonctionnant suivant un cycle de Carnot. — 103. Des régénérateurs pour les gaz. — 104. Machine de Stirling. — 105. Machine d'Ericsson.

*Chapitre II. — Etude des vapeurs*

N$^{os}$ 106. Chaleurs latentes de vaporisation. — 107. Transformation d'un mélange de liquide et de vapeur saturée. — 111. Vapeurs saturées sèches. — 113. Condensation de la vapeur d'eau pendant la détente. — 114. Mélange de vapeur et de liquide.

*Chapitre III. — Machines à vapeur*

N$^{os}$ 116. Emploi de la vapeur comme moteur (historique). — 120. Travail d'un poids de vapeur introduit dans le cylindre d'une machine à condensation et à détente complète. — 121. Cas d'une détente incomplète. — 122. Chemise de vapeur. — 123. — Vapeur surchauffée.

*Chapitre IV. — Changement d'état des corps*

Fusion et Solidification

N$^{os}$ 124. — Température de fusion. Chaleur latente de fusion. — 125. Transformation d'un mélange de liquide et de solide. — 127. Température de fusion de la glace. Regel.

*Rappel de notions sur les infiniment petits et sur les différentielles*

N$^{os}$ 128 et suivants.

# THÉORIE MÉCANIQUE
# DE LA CHALEUR

## PREMIÈRE PARTIE

### RÉSUMÉ DES RÉSULTATS DE LA PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE SUR LA CHALEUR ET LES CHANGEMENTS D'ÉTAT

## CHAPITRE PREMIER

### DE LA TEMPÉRATURE

1. Équilibre de température. — Considérons plusieurs corps, formant un système isolé; ceux qui sont plus *chauds* cèdent, dit-on, de la chaleur à ceux qui sont plus froids. Il arrive, après un certain temps, que les corps du système paraissent ne plus recevoir ou abandonner de chaleur, et cet état persiste indéfiniment, si le système reste isolé. On dit que le système est en équilibre de température ou que les corps qui le composent sont à la même température.

Deux corps en équilibre de température avec un troisième sont en équilibre de température entre eux. L'équilibre de température d'un système est indépendant de la disposition des corps qui le composent.

2. Constatation de la température. — Les propriétés des corps sont liées à leur température; il importe donc de pouvoir constater avec précision la température. Le phénomène le plus simple et le plus facile à apprécier, produit par la chaleur, est celui de la dilatation des corps. A une même température répond un même volume pour un corps donné, pourvu que la pression ne change pas. On pourra donc définir la température par l'état correspondant d'un corps pris comme *thermomètre* et dont on aura préalablement étudié la dilatation.

Prenons, par exemple, deux états d'équilibre de température bien définis : celui qui répond à la fusion de la glace et celui qui répond à

l'ébullition de l'eau à la pression de $0^m,760$ de mercure. Le premier étant désigné par 0° et le second par 100°, si $\delta_{100}$ représente l'augmentation totale de volume du corps qui compose le thermomètre, par chaque variation $\frac{\delta_{100}}{100}$ dans le volume de ce corps, on pourra définir un état d'équilibre de température compris entre 0° et 100°. C'est ainsi que sont ordinairement définis cent degrés de température depuis la glace fondante jusqu'à l'ébullition de l'eau.

3. Choix d'un thermomètre. — On peut sans doute prendre pour thermomètre un corps quelconque; mais la loi de la dilatation varie avec chaque corps et n'est d'ailleurs pas connue, il serait donc difficile de comparer entre elles les indications fournies par des corps différents. On s'est occupé de définir avec soin l'instrument dont on se sert pour constater la température.

Montrons d'abord comment on peut faire la comparaison des indications de deux thermomètres. Quelle que soit la loi de dilatation d'un corps, on peut la représenter d'une manière empirique par la formule

$$\delta_1 = at + bt^2 + ct^3 + \dots$$

$a$, $b$, $c$... étant des coefficients que l'on déterminerait au moyen d'un nombre d'expériences égal à celui des coefficients considérés, $t$ étant la température indiquée en degrés par un corps particulier. La dilatation de ce dernier pour un degré étant $K = \frac{\delta_{100}}{100}$, et sa dilatation, pour la température considérée, étant $\delta$, on a $t = \frac{\delta}{K}$. La température $t_1$, définie de la même manière par le corps dont la dilatation est $\delta_1$, serait $t_1 = \frac{\delta_1}{K_1}$.

On a donc :

$$t_1 = \frac{a}{K_1}t + \frac{b}{K_1}t^2 + \frac{c}{K_1}t^3 + \dots$$

Chaque corps ayant ses coefficients K, $a$, $b$, $c$..., il y aura, par conséquent, une échelle de température particulière pour chaque corps.

4. — Dulong et Petit admirent qu'il est plus simple d'exprimer les températures par la dilatation de l'air. Leur raison équivaut à dire que la dilatation de l'air est proportionnelle à la quantité de chaleur qui la produit; mais, d'une part, cette proportionnalité n'est pas rigoureuse, même pour l'air, et, d'autre part, si le thermomètre pouvait indiquer les quantités de chaleur qu'il absorbe, il n'indiquerait pas directement en général les quantités de chaleur absorbées par les corps avec lesquels

il se mettrait en équilibre de température. En effet, la loi qui lie la dilatation d'un corps quelconque à la quantité de chaleur qu'il absorbe est peu connue et sans aucun doute compliquée.

5. — On s'est borné à désirer que les indications du thermomètre fussent comparables quels que soient les détails de sa construction. Les thermomètres à gaz donnent tous la même température dans les mêmes conditions d'équilibre de température et quelle que soit l'enveloppe du gaz, car les dilatations subies par celle-ci sont très-faibles et de plus diffèrent très-peu d'un thermomètre à un autre pour une même espèce d'enveloppe. Cependant cette indication ne serait rigoureuse que si l'on avait un *gaz parfait*. L'air est le gaz qu'il convient d'employer.

L'instrument dont on se sert le plus ordinairement est le thermomètre à mercure gradué par comparaison avec le thermomètre à air.

# CHAPITRE II

## DE L'ÉTAT DES CORPS

### Élasticité

6. Elasticité dans les solides. — On a étudié plus complétement l'élasticité de traction, celle de compression, celle de torsion, celle de flexion; ce que l'on sait sur l'élasticité suffit ordinairement aux besoins des constructeurs, mais les études générales sont très-incomplètes. En particulier, la physique donne peu d'indications sur l'influence de la température. Nous ne rappellerons pas les résultats de l'expérience sur l'élasticité dans les corps solides, non plus que ceux qui ont rapport à l'élasticité dans les corps liquides; ils sont un peu en dehors de notre sujet principal.

7. Élasticité dans les gaz. — Nous allons résumer ce qui a rapport à l'élasticité dans les gaz, parce que les résultats sont plus complets que pour les autres corps, et parce que l'étude des gaz est importante pour ce qui va suivre.

Considérons une masse d'un gaz, et faisons varier sa pression sans faire varier sa température. Pour cela il faut la placer dans une enveloppe mobile qui permette les variations de volume correspondantes aux variations de pression, et il faut, de plus, que cette enveloppe soit parfaitement conductrice, d'une masse infinie et d'une température constante, de manière qu'elle puisse, sans changer de température, prendre au gaz ou lui céder les quantités de chaleur nécessaires pour que sa température ne change pas en même temps que le volume. Cette dernière condition est remplie aussi bien que possible par le courant d'eau à température constante dont on entoure le récipient des gaz dans les appareils où l'on étudie leur compression.

La loi de Mariotte, à laquelle on s'est tenu pendant longtemps, peut s'énoncer ainsi :

*Pour une même masse de gaz dont on fait varier la pression et le volume,*

*la température ne changeant pas, les volumes sont en raison inverse des pressions.*

Ce qui s'écrit $pv = c$; formule qui exprime que le produit de la pression par le volume correspondant est constant pour une même masse de gaz.

8. — M. Regnault a démontré que les gaz s'écartent tous plus ou moins de la loi de Mariotte. Ses conclusions sont :

1° Pour les gaz liquéfiables, la compressibilité augmente avec la pression, et, de plus, elle suit une loi spéciale pour chacun d'eux.

2° En chauffant les gaz, ce qui les éloigne de leur point de liquéfaction, leur compressibilité est approximativement donnée par la loi de Mariotte.

L'acide carbonique, l'acide sulfureux, l'ammoniaque se compriment plus que ne l'indique la loi de Mariotte. L'air, l'azote sont dans le même cas, mais d'une manière moins prononcée. L'hydrogène s'écarte de la loi de Mariotte, mais en sens contraire des précédents : sa compressibilité décroît quand la pression augmente.

L'acide carbonique chauffé à 100° se comporte suivant la loi de Mariotte.

9. — En définitive, les gaz s'éloignent fort peu de la loi de Mariotte. Dans les applications, il n'y a aucun inconvénient à regarder cette loi comme exacte. Afin de mettre plus de précision dans le raisonnement, on considère des *gaz parfaits*, c'est-à-dire des gaz fictifs qui suivent la loi de Mariotte. Nous venons de voir que, en prenant tous les gaz assez loin de leur point de liquéfaction, leur compressibilité serait celle des gaz parfaits.

## Dilatation

10. Dilatation des liquides et des solides. — Soit $t$ la température du corps considéré, $V_0$ son volume à 0°, et $V_t$ son volume à $t$°. On a

$$V_t = V_0 (1 + at + bt^2 + \ldots),$$

car la dilatation n'est pas proportionnelle à la température, nous l'avons déjà fait remarquer. Le coefficient de dilatation moyen entre les températures $t$ et $t + \Delta t$, auxquelles répondent les volumes $V_t$ et $V_t + \Delta V_t$, sera $\frac{\Delta V_t}{\Delta t}$. Nous appellerons coefficient de dilatation du corps considéré à la température $t$ la dérivée de la fonction V par rapport à $t$ prise pour cette valeur de $t$.

Le coefficient de dilatation augmente avec la température mesurée au thermomètre à air et suivant une loi variable pour chaque corps.

COEFFICIENT DE DILATATION CUBIQUE MOYEN.

| TEMPÉRATURES INDIQUÉES AU THERMOMÈTRE A AIR. | MERCURE. | FER. | CUIVRE. | PLATINE. | VERRE. |
|---|---|---|---|---|---|
| 100° | $\frac{1}{5\,550}$ | $\frac{1}{28\,200}$ | $\frac{1}{19\,400}$ | $\frac{1}{37\,700}$ | $\frac{1}{38\,700}$ |
| 200° | $\frac{1}{5\,425}$ | » | » | » | » |
| 300° | $\frac{1}{5\,300}$ | $\frac{1}{22\,700}$ | $\frac{1}{17\,700}$ | $\frac{1}{36\,300}$ | $\frac{1}{32\,900}$ |

Pour des variations de température peu considérables, on pourra se servir de la formule $V_t = V_0(1 + \alpha t)$; $\alpha$ est le coefficient de dilatation.

11. Dilatation des gaz. — La compressibilité et la dilatation des gaz augmentent quand la pression augmente et diminuent quand la température augmente. Il faut faire une exception pour l'hydrogène, qui s'écarte de la loi de Mariotte en sens contraire des autres gaz. Ainsi la formule $V_t = V_0(1 + \alpha t)$ n'est pas rigoureusement exacte pour les gaz. Cependant elle est très-approximative, ainsi que le montre le tableau suivant, et de l'ensemble des faits, on peut déduire cette loi :

*Les gaz parfaits ont une dilatation commune et indépendante de la pression.*

Cette dilatation est à très-peu près celle de l'hydrogène.

DILATATION ENTRE 0 ET 100 DEGRÉS,

| | SOUS VOLUME CONSTANT. | SOUS PRESSION CONSTANTE. |
|---|---|---|
| Hydrogène . . . . . | 0,366 7 | 0,366 1 |
| Air . . . . . | 0,366 5 | 0,367 0 |
| Azote . . . . . | 0,366 8 | |
| Acide carbonique . . . . | 0,366 8 | 0,371 0 |

Nous prendrons pour $\alpha$ la fraction $\frac{1}{273}$.

### Changement d'état

12. Fusion. — Les lois de la fusion sont :

1° La température de fusion à pression constante est fixe pour un même corps.

2° La température d'un corps ne change pas pendant que la fusion s'opère.

3° La température ne changeant pas, le corps absorbe la chaleur qu'on lui communique pour qu'il fonde. Cette chaleur ne donnant aucune variation de température, on l'appelle chaleur *latente* de fusion.

4° La température de fusion change notablement avec la pression. Elle s'élève ou s'abaisse quand la pression augmente, suivant que la substance augmente ou diminue de volume pendant la liquéfaction.

L'eau diminue de volume pendant la liquéfaction; le blanc de baleine, la paraffine éprouvent au contraire une dilatation. Voici leurs températures de fusion sous différentes pressions :

| EAU. | | BLANC DE BALEINE. | | PARAFFINE. | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pressions. | Températures. | Pressions. | Températures. | Pressions. | Températures. |
| 1atm. | 0° | 1atm. | 47°,7 | 1atm. | 46°,3 |
| 8atm. | — 0,049 | 29 | 48°,3 | 85 | 48°,9 |
| 16atm,8 | — 0,129 | 96 | 49°,7 | 100 | 49°,9 |
| | | 156 | 50°,9 | | |

13. Solidification. — 1° Le point de solidification est fixe et est le même que celui de fusion.

2° La température d'un corps ne change pas pendant que la solidification s'opère.

3° La température ne changeant pas, le corps dégage la chaleur latente qu'il avait absorbée pendant la fusion.

4° Quand la pression augmente, les corps tels que l'eau, qui se dilatent pendant la solidification, subissent un retard à la solidification; ceux qui se contractent pendant la solidification subissent une avance à la solidification.

14. Ébullition. — 1° La température de l'ébullition à pression constante est fixe pour un même corps.

Voici quelques températures d'ébullition à la pression de 0m,760 de mercure : l'éther sulfurique bout à 25°, l'alcool à 79°,7, l'acide azotique (1,522) à 86°, l'eau à 100°, l'acide sulfurique à 325°, le mercure à 350°, le soufre à 400°.

2° La température d'un corps ne change pas pendant l'ébullition.

3° La température ne changeant pas, le corps absorbe la chaleur qu'on lui communique pour entretenir l'ébullition. Cette chaleur ne donnant aucune variation de température, on l'appelle chaleur *latente* de vaporisation.

4° La température d'ébullition s'abaisse quand la pression diminue

15. Vapeurs. — Si l'on fait parvenir au-dessus du mercure, dans un baromètre, quelques gouttes d'un liquide, le mercure subit une dépression et l'espace au-dessus du mercure se remplit de la vapeur du liquide considéré. La force élastique de la vapeur dans cet espace,

c'est-à-dire sa pression, qu'on appelle encore sa tension, se mesure par la hauteur dont le niveau du mercure a baissé dans le baromètre.

Si l'on soulève le tube barométrique qui plonge, je suppose, d'une longueur suffisante dans une cuve à mercure, l'espace occupé par la vapeur augmente, le liquide se vaporise. Tant que la vapeur est en contact avec le liquide, c'est-à-dire tant que tout le liquide n'est pas vaporisé, la tension de la vapeur est la même, si toutefois la température ne change pas. Dans ces circonstances, on dit que l'espace est saturé de vapeur, et la tension est appelée tension maximum de la vapeur à la température de l'expérience.

Si l'on répète la même expérience à des températures différentes, on voit qu'il y a une tension maximum répondant à chaque température. Si l'on cherchait à l'augmenter en enfonçant le tube barométrique dans le mercure de la cuvette fixe, l'espace occupé par la vapeur diminuerait, mais une partie de la vapeur reprend l'état liquide et la tension maximum reste la même. On peut donc dire : Le poids de vapeur qui sature un espace est proportionnel au volume de cet espace et croît avec la température.

16. — Quand tout le liquide est vaporisé et que l'on continue à augmenter le volume occupé par la vapeur, la tension est plus petite que la tension maximum, l'espace n'est plus saturé, et la vapeur se comporte à très-peu près comme les gaz.

1° Les vapeurs non saturantes ont un coefficient de dilatation variant de 0,00366 à 0,00380 pour toutes les vapeurs et pour toutes les pressions, ces dernières étant, bien entendu, inférieures à celles qui produiraient la saturation.

2° Les vapeurs non saturantes suivent la loi de Mariotte, comme la suivent les gaz voisins de leur point de liquéfaction. La compressibilité augmente quand on approche du point de liquéfaction.

On peut dire que, pour des températures élevées et des pressions très-inférieures à celles qui produiraient la liquéfaction aux températures correspondantes, les vapeurs se comporteraient comme des gaz.

17. — Les mélanges de gaz et de vapeurs sont soumis aux deux lois suivantes :

1° Le poids de vapeur qui sature un même espace à une même température est le même, que cet espace soit vide ou qu'il soit occupé par un gaz. C'est-à-dire que si, dans les expériences du n° 15, on considère un même espace au-dessus du mercure dans le tube barométrique et qu'on cherche la tension de la vapeur qui le sature, on trouve la même tension que cet espace soit saturé de vapeur seulement ou qu'il soit d'abord occupé par un gaz.

2° Dans un mélange de gaz et de vapeurs, chacun d'eux a la ten-

sion qu'il aurait s'il était considéré isolément comme occupant tout l'espace du mélange, et la pression totale égale la somme des forces élastiques des gaz et des vapeurs considérés individuellement, comme nous venons de le dire.

18. — On a dressé des tables des forces élastiques de différentes vapeurs. La vapeur d'eau a été l'objet d'études très-soignées, et on a proposé plusieurs formules empiriques pour représenter la force élastique de la vapeur d'eau en fonction de la température. Celle de Biot, qui contient cinq coefficients, est celle qui a été adoptée par M. Regnault, comme offrant des résultats numériques plus conformes avec ceux de l'expérience. Si F désigne la force élastique évaluée en millimètres d'une colonne de mercure, et si $x = t + 20$, on a :

$$\log F = a - b\alpha^x - c\beta^x$$

$$a = 6{,}264\ 0348$$

$$\log b = 0{,}139\ 7743 \qquad \log \alpha = \bar{1}{,}994\ 049292$$

$$\log c = 0{,}692\ 4351 \qquad \log \beta = \bar{1}{,}998\ 343862$$

Voici d'ailleurs, d'après M. Regnault, une table des forces élastiques de l'eau à diverses températures :

FORCE ÉLASTIQUE DE LA VAPEUR D'EAU D'APRÈS M. REGNAULT.

| TEMPÉRATURES DU THERMOMÈTRE A AIR. | ÉLASTICITÉ EN MILLIMÈTRES. | TEMPÉRATURES DU THERMOMÈTRE A AIR. | ÉLASTICITÉ EN MILLIMÈTRES. |
|---|---|---|---|
| — 30 | 0,386 | 100 | 760,00 |
| — 20 | 0,927 | 110 | 1075,37 |
| — 10 | 2,093 | 120 | 1491,28 |
| 0 | 4,600 | 130 | 2030,28 |
| 10 | 9,165 | 140 | 2717,63 |
| 20 | 17,391 | 150 | 3581,23 |
| 30 | 31,548 | 160 | 4651,62 |
| 40 | 54,906 | 170 | 5961,66 |
| 50 | 91,982 | 180 | 7546,39 |
| 60 | 148,791 | 200 | 11688,96 |
| 70 | 233,093 | 210 | 14324,80 |
| 80 | 254,643 | 220 | 17390,35 |
| 90 | 525,450 | 230 | 20926,40 |

On peut se rendre compte à l'inspection de ce tableau de ce principe expérimental : l'eau peut bouillir à toute température. En effet, supposons que l'eau soit portée à 70° et que la pression de l'atmosphère qui pèse dessus soit moindre que 233 millimètres de mercure; si cette atmosphère est d'une étendue indéfinie, il y aura la production continue et active de vapeur qui constitue l'ébullition.

### Etat d'un corps

19. — Les connaissances relatives à l'état des corps sont bien limitées; nous venons de donner le résumé des principaux résultats acquis par l'expérimentation. On peut remarquer que la physique ne considère que des températures uniformes dans toute l'étendue d'un corps et que des pressions uniformes et normales à la surface du corps considéré. Nous disons pression et température uniformes, et non pas pression et température constantes, pour exprimer qu'elles ne varient pas d'un point à un autre du corps à une époque donnée; mais elles peuvent varier avec le temps dans toute l'étendue du corps. Les études, même dans ce cas particulier, sont loin d'être complètes. Cependant, on peut en conclure que pour chaque corps il y a une fonction qui lie la température $t$ et la pression $p$ par unité de surface, définies comme nous venons de le faire, au volume $v$ de l'unité de poids d'un corps (ce qu'on peut appeler le volume spécifique). Soit

$$F(t, p, v) = 0$$

cette fonction. Si l'on se reporte à ce qui précède, on voit que ce n'est guère que pour les gaz que cette fonction est connue. Soit $v_0$ le volume de l'unité de poids d'un gaz à 0 degré et à la pression $p_0$; soit $v$ le volume de l'unité de poids de ce gaz à la pression $p$ et à la température $t$. Si l'on fait varier seulement la température, $v_0(1+\alpha t)$ est le volume de l'unité de poids du gaz à la pression $p_0$ et à la température $t$; on a donc, d'après la loi de Mariotte,

$$pv = p_0 v_0 (1+\alpha t).$$

Cette équation ne convient rigoureusement qu'aux gaz parfaits.

20. — La fonction $F(t, p, v)=0$ n'est pas connue, même d'une manière empirique, pour les autres corps. Elle devrait résumer les lois dont nous avons parlé dans ce chapitre et d'autres dont nous n'avons rien dit. Par exemple, pour les solides, elle devrait donner le ramollissement qui précède la fusion; nous avons admis, en quelque sorte, que ce phénomène s'opère brusquement à une température constante, ou du moins, c'est ce que l'on doit croire en lisant les lois de la fusion; mais on a constaté que le passage de l'état solide à l'état liquide s'effectue d'une manière continue. Pour les liquides, autre exemple, elle devrait donner le maximum de densité et les variations du coefficient de dilatation aux environs de la température d'ébullition.

# CHAPITRE III

## DES QUANTITÉS DE CHALEUR

21. De la chaleur considérée comme grandeur. — Sans se préoccuper de la nature de la chaleur, on peut arriver à la considérer comme une grandeur et, par suite, à la mesurer; pour cela on pourra raisonner comme on l'a fait pour mesurer les forces. Considérons un kilogramme d'eau dont on élève la température de 0 à 1 degré, on emploie une certaine quantité de chaleur à cette opération; il est évident que si on élève deux kilogrammes d'eau de 0 à 1 degré, il faudra employer une quantité de chaleur double de la précédente. D'autre part, si l'on élève un kilogramme d'eau de 0 degré à 1, 2, 3..... degrés, il faudra employer dans chaque cas des quantités de chaleur différentes. On peut donc dire que la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température d'un corps est proportionnelle à son poids et est fonction de l'élévation de température.

22. Calorie. — Quand nous nous servons de l'expression quantité de chaleur, nous n'entendons pas dire que la chaleur est comme un fluide qui passerait en quantités plus ou moins grandes d'un corps dans un autre. Ce que l'on se propose, en définitive, dans la calorimétrie, tant qu'on ne se préoccupe pas de la nature de la chaleur, c'est l'étude des phénomènes thermiques équivalents. Si, par exemple, deux corps sont en présence et tendent à se mettre en équilibre de température, il se passe deux phénomènes calorifiques, dont l'un correspond constamment à l'autre dans des circonstances identiques. Ainsi, quand l'un partira de la température $t$ et l'autre de la température $t_1$, ils arriveront tous les deux à une température intermédiaire entre $t$ et $t_1$, qui sera la même chaque fois que l'on répétera la même expérience. Si l'on fait des expériences analogues, qui ne diffèrent que par les températures $t$ et $t_1$, on trouve que, dans chaque cas, l'élévation de température d'un des corps correspond à un abaissement de température de

l'autre, et que ces deux choses sont liées l'une à l'autre. Ces phénomènes sont dits phénomènes calorifiques équivalents.

Ce qu'il importerait de connaître, c'est l'équivalence entre tous les phénomènes calorifiques groupés deux à deux ; mais, afin de simplifier l'étude, on a pris un phénomène type, bien défini, et auquel on peut rapporter les autres d'une manière commode. C'est à l'élévation de 1 kilogramme d'eau de 0 à 1 degré, que nous rapporterons les phénomènes calorifiques.

23. — On appelle *calorie* la quantité de chaleur nécessaire pour élever 1 kilogramme d'eau de 0 à 1 degré centigrade. Nous garderons cette définition, bien qu'elle vienne de l'hypothèse prématurée sur la nature de la chaleur, dont je viens de parler au début du numéro précédent. Lorsque nous dirons que la fusion de 1 kilogramme de glace demande 79 calories, cela voudra dire que le phénomène de la fusion de 1 kilogramme de glace est l'équivalent du phénomène de l'élévation de 79 kilogrammes d'eau de 0 à 1 degré.

### Chaleurs spécifiques.

24. Chaleurs spécifiques ou capacités calorifiques. — On appelle ainsi la quantité de chaleur, évaluée en calories, nécessaire pour élever de 0 à 1 degré 1 kilogramme d'un corps. Si $Q_t$ est la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température d'un corps depuis 0 jusqu'à $t$ degrés, si C est la chaleur spécifique, on aura

$$Q_{t'} - Q_t = C\,(t' - t)$$

parce que C est à peu près constant. Cependant les chaleurs spécifiques sont variables avec la température et la pression. Voici les lois des chaleurs spécifiques :

1° La chaleur spécifique des solides varie avec leur état moléculaire; le recuit, le martelage, la fusion, la cristallisation... influent. Elle est sensiblement constante pour un même état entre des températures éloignées du point de fusion. Elle croît quand on se rapproche de ce point.

2° La chaleur spécifique des liquides est croissante avec la température dans toute l'étendue de l'échelle thermométrique.

3° *La capacité calorifique sous pression constante pour un gaz parfait est indépendante de la pression et de la température.*

Elle varie pour les gaz naturels qui s'écartent de la loi de Mariotte.

4° *A l'état liquide, les corps ont une plus grande capacité calorifique qu'à l'état solide et à l'état gazeux.*

Nous donnons plusieurs tableaux résumant les expériences d'après lesquelles ces lois ont été établies.

CHALEUR SPÉCIFIQUE DES SOLIDES D'APRÈS PETIT ET DULONG.

| | DE 0 A 100 DEGRÉS. | DE 0 A 300 DEGRÉS. |
|---|---|---|
| Fer. . . . . | 0,1088 | 0,1218 |
| Zinc . . . . . | 0,0927 | 0,1015 |
| Antimoine. . . . . | 0,0507 | 0,0549 |
| Argent . . . . . | 0,0557 | 0,0611 |
| Cuivre . . . . . | 0,0949 | 0,1013 |
| Verre. . . . . | 0,177 | 0,1900 |

CHALEUR SPÉCIFIQUE DES LIQUIDES D'APRÈS M. REGNAULT.

| | DE 5 A 10 DEGRÉS. | DE 10 A 15 DEGRÉS. | DE 15 A 20 DEGRÉS. |
|---|---|---|---|
| Mercure. . . . . | 0,0282 | 0,0283 | 0,029 |
| Ether sulfureux. . . | 0,5207 | 0,5158 | 0,5157 |
| Alcool. . . . . | 0,5957 | 0,6017 | 0,6148 |
| Sulfure de carbone . | 0,2179 | 0,2183 | 0,2206 |

CHALEUR SPÉCIFIQUE DE L'EAU A DIFFÉRENTES TEMPÉRATURES.

| THERMOMÈTRE A AIR. | CAPACITÉ. | THERMOMÈTRE A AIR. | CAPACITÉ. |
|---|---|---|---|
| 0° | 1,000 0 | 120° | 1,017 7 |
| 20 | 1,001 2 | 140 | 1,023 2 |
| 40 | 1,003 0 | 160 | 1,029 4 |
| 60 | 1,005 6 | 180 | 1,036 4 |
| 80 | 1,008 9 | 200 | 1,044 4 |
| 100 | 1,013 0 | 230 | 1,056 8 |

CHALEUR SPÉCIFIQUE DES GAZ ET DES VAPEURS

EN POIDS ET RAPPORTÉES A L'EAU, LA PRESSION ÉTANT CONSTANTE.

| | |
|---|---|
| Air. . . . . | 0,237 41 |
| Oxygène . . . . . | 0,217 51 |
| Hydrogène . . . . . | 3,409 |
| Azote . . . . . | 0,243 8 |
| Acide carbonique. . . . . | 0,202 46 |
| Oxyde de carbone . . . . . | 0,245 |
| Protoxyde d'azote . . . . . | 0,344 7 |
| Ammoniac . . . . . | 0,508 36 |
| Ether sulfureux . . . . . | 0,479 66 |
| Alcool . . . . . | 0,453 41 |

D'APRÈS M. REGNAULT :

| CHALEUR SPÉCIFIQUE POUR AIR. | | CHALEUR SPÉCIFIQUE POUR ACIDE CARBONIQUE. | |
|---|---|---|---|
| de 0 à 100° | 0,237 41 | de 10 à 100° | 0,202 46 |
| 0 à 200 | 0,237 51 | 10 à 210 | 0,216 92 |

D'APRÈS DELAROCHE ET BÉRARD,

CHALEUR SPÉCIFIQUE DE L'AIR A PRESSION CONSTANTE.

| PRESSIONS. | CAPACITÉS. | PRESSIONS. | CAPACITÉS. |
|---|---|---|---|
| $5674^{m}/_{m}$ à 4019 | 0,225 46 | $3000^{m}/_{m}$ | 0,232 36 |
| $760^{m}/_{m}$ | 0,226 16 | $760^{m}/_{m}$ | 0,232 01 |

CHALEUR SPÉCIFIQUE MOYENNE A L'ÉTAT

| | SOLIDE. | LIQUIDE. | GAZEUX. |
|---|---|---|---|
| Eau. . . . . | 0,474<br>0,504 | 1,000 | 0,475 |
| Brôme. . . . . | 0,084 32 | 0,110 94 | 0,055 18 |
| Mercure . . . . . | 0,031 36 | 0,033 32 | » |
| Etain . . . . . | 0,056 23 | 0,063 7 | » |
| Phosphore . . . . | 0,174 0<br>0,183 7 | 0,200 6<br>0,204 5 | »<br>» |
| Plomb. . . . . | 0,031 4 | 0,040 2 | » |
| Soufre. . . . . | 0,201 6 | 0,234 | » |

L'avant dernier tableau montre que la capacité calorifique de l'air varie très-peu pour de très-grandes variations de la pression. Ces nombres résultent de deux séries d'expériences dans lesquelles on ne s'est pas attaché à faire disparaitre les causes d'erreur, mais à les rendre constantes; c'est pourquoi ils diffèrent notablement des nombres donnés par M. Regnault.

M. Regnault chauffait de l'eau sous pression constante jusqu'à la température correspondant à l'ébullition, puis il déterminait la quantité de chaleur nécessaire pour cette transformation. Il trouva, pour des expériences continuées jusqu'à 230 degrés que la quantité de chaleur absorbée par l'eau depuis 0 jusqu'à $t$ degrés est exprimée par la formule

$$Q = t + 0{,}000\,02\,t^2 + 0{,}000\,000\,3\,t^3.$$

Si $dQ$ est la quantité de chaleur nécessaire pour chauffer 1 kilogramme d'eau de $t$ à $t + dt$ degrés, la chaleur spécifique correspondante à la tempétature $t$ est

$$\frac{dQ}{dt} = 1 + 0{,}000\,04\,t + 0{,}000\,000\,9\,t^2.$$

25. CAPACITÉ CALORIFIQUE A VOLUME CONSTANT POUR LES GAZ. — Nous en parlerons au n° 32. Pour le moment, nous rappellerons que lorsqu'un gaz ou une vapeur subissent une dilatation, leur température s'abaisse, et que si, au contraire, un gaz subit une compression, sa température s'élève. On suppose, dans ce que nous venons de dire, que le gaz est en contact avec des corps absolument mauvais conducteurs, c'est-à-dire ne pouvant donner de chaleur au gaz, ni lui en prendre, suivant le cas. C'est ce phénomène qui donne lieu à la recherche de deux capacités calorifiques pour les gaz : l'une à pression constante, l'autre à volume constant.

### Chaleurs latentes

26. — Nous avons vu aux nos 12 et 13 ce qu'il faut entendre par chaleur latente, soit de fusion, soit de vaporisation.

D'APRÈS M. PERSON :

| | POINT DE FUSION. | CHALEUR LATENTE DE FUSION OBSERVÉE. |
|---|---|---|
| Eau | C°,0 | 79,25 |
| Phosphore | 44 ,2 | 5,034 |
| Soufre | 115 ,2 | 9,368 |
| Etain | 237 ,7 | 14,252 |
| Plomb | 326 ,2 | 5,369 |
| Zinc | 415 ,3 | 28,13 |
| Mercure | » | 2,83 |

CHALEUR LATENTE DE VAPORISATION.

| | |
|---|---|
| Eau | 536 |
| Alcool absolu | 264 |
| Ether sulfureux | 91 |

27. CHALEUR DE VAPORISATION ET CHALEUR LATENTE DE VAPORISATION POUR L'EAU. — D'après M. Regnault, la quantité de chaleur nécessaire pour élever 1 kilogramme d'eau de 0 degré à $t$ degrés et pour le vaporiser à cette température est donnée par la formule

$$Q = 606{,}5 + 0{,}305\,t.$$

Si l'on suppose que la capacité calorifique de l'eau liquide est constante, quelle que soit la température, et qu'elle est égale à 1, la quantité de chaleur nécessaire pour élever 1 kilogramme d'eau de 0° à $t$° est $t$; par suite $Q - t$ représente la chaleur latente pour la vaporisation à $t$ degrés, et l'on a $Q - t = 606{,}5 - 0{,}695\,t$. Donc la chaleur latente décroît quand la vaporisation est retardée.

D'une manière plus exacte, la chaleur latente de l'eau égale Q diminué de la quantité de chaleur nécessaire pour élever l'eau de 0 à $t$ degrés et qui est $t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}0000009\,t^3$. Représentons par $L_t$, la chaleur latente de vaporisation pour la température $t$, on a

$$L_t = 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}000\,02\,t^2 - 0{,}000\,000\,3\,t^3.$$

### Equivalence du travail et de la chaleur

28. CHALEUR DÉVELOPPÉE PAR LE FROTTEMENT. — Citons les faits principaux qui prouvent l'équivalence du travail et de la chaleur Commençons par ceux qui dépendent du frottement.

Quand on met deux corps en contact, les aspérités qu'ils présentent s'engagent les unes dans les autres. Si on les fait se déplacer l'un sur l'autre, il en résulte une résistance d'autant plus forte que les surfaces sont moins unies et sont plus fortement pressées. Les sauvages obtiennent du feu en faisant tourner rapidement un fuseau de bois dur qui frotte sur du bois d'une autre essence.

Par le choc d'un morceau d'acier contre une pierre dure, on détache des parcelles d'acier qui sont portées à une température assez élevée pour qu'elles puissent brûler.

Quand on lime du fer ou quand on le tourne, il s'échauffe, ainsi que les outils. Rumfort fit forer la masselotte d'une pièce de canon sortant de la fonderie et mesura l'élévation de la température produite par le travail du foret.

M. Joule a obtenu une élévation de température dans un liquide frottant contre des corps solides constitués par des palettes mobiles attachées à un axe de rotation et des palettes fixes attachées aux parois du vase contenant le liquide.

29. Chaleur dégagée dans les changements d'état des corps.— Les corps qui passent à la filière s'échauffent.

Une lame métallique que l'on ploie en divers sens s'échauffe, même quand la flexion ne dépasse pas la limite d'élasticité.

Les métaux s'échauffent sous le choc des marteaux.

En rapprochant les faits cités dans ce paragraphe des phénomènes étudiés précédemment, on dira que toute la chaleur donnée à un corps pendant que sa température augmente n'est pas employée en totalité à cette élévation de température, mais qu'une partie correspond au travail des forces intérieures ou forces moléculaires et au travail des forces extérieures. Ainsi, dans la fusion, il y a absorption de chaleur latente, parce qu'il se produit un travail moléculaire considérable. Dans la vaporisation, l'absorption de chaleur latente correspond à un travail moléculaire et à un travail de forces extérieures, car les molécules qui constituent la vapeur doivent soulever le poids de l'atmosphère qu'elles supportaient dans l'état liquide. On s'explique encore que la capacité calorifique d'un corps varie avec l'état moléculaire, comme nous l'avons dit.

Parmi les changements d'état, nous pouvons placer ceux qui résultent de la combinaison des corps ou de leur décomposition. On sait que toute combinaison chimique s'effectue avec dégagement de chaleur. Nous ne pouvons entrer dans les détails des actions chimiques; nous donnerons seulement un tableau de la chaleur produite par la combustion de certains corps.

| | CHALEUR DÉGAGÉE PAR 1 GR. DE COMBUSTIBLE. |
|---|---|
| Hydrogène | 34 462 calories |
| Oxyde de carbone | 2 403 » |
| Gaz des marais | 13 063 » |
| Charbon de bois | 8 080 » |
| Charbon des cornues à gaz | 8 047 » |
| Graphite naturel | 7 796 » |
| Diamant | 7 770 » |
| Soufre natif opaque | 2 261 » |
| Ether sulfurique | 9 027 » |
| Alcool | 7 183 » |
| Esprit de bois | 5 307 » |
| Acide stéarique | 9 716 » |

30. Compression et expansion des gaz. — Quand on comprime un gaz qui ne reçoit ni ne cède de chaleur, sa température augmente. L'expérience du briquet à air est bien connue.

Quand le volume d'un gaz augmente et qu'il ne reçoit ni ne cède de chaleur, sa température baisse. Produisons dans une chaudière de la vapeur à haute pression, puis laissons-la échapper par un petit orifice; le jet qui se forme ainsi produit sur la main une sensation de fraîcheur.

Gay-Lussac a prouvé par expérience que l'élévation de température produite par une certaine augmentation de pression égale l'abaissement de température produit par une diminution de pression égale. On prenait deux ballons d'égales capacités; dans l'un on faisait le vide et dans l'autre on mettait un gaz soumis à une pression de plusieurs atmosphères. Puis on mettait les deux ballons en communication, et le gaz se répandait dans le ballon vide jusqu'à ce que la pression fût la même dans les deux. Un thermomètre, placé dans le ballon primitivement vide, indiquait alors une élévation de température; un thermomètre placé dans l'autre ballon indiquait un abaissement de température égal à l'élévation marquée par l'autre. M. Joule vérifia la même loi en plaçant les deux ballons dans un même calorimètre; la température du calorimètre ne variait pas.

Mentionnons encore l'expérience de Clément et Désormes pour déterminer l'élévation de température produite par la compression d'un gaz. Cette expérience a été entreprise afin de déterminer la capacité calorifique à volume constant. Par les résultats obtenus, on a cherché à expliquer la différence entre la vitesse du son dans l'air donnée par l'expérience et celle donnée par la formule de Newton.

31. Équivalent mécanique de la chaleur. — On appelle ainsi le nombre de kilogrammètres qui correspond à une calorie. *L'équivalent mécanique de la chaleur est* 425 *kilogrammètres.*

L'équivalent mécanique de la chaleur est un nombre constant, c'est-

à-dire que, dans tous les phénomènes thermodynamiques, à une calorie répondront 425 kilogrammètres. Supposons un phénomène A où l'équivalent mécanique serait 450, par exemple; associons ce phénomène à un autre B où l'équivalent est 425. Faisons une dépense de une calorie pour produire, par le phénomène A, 450 kilogrammètres; on pourra en utiliser 425 à la production du phénomène B, qui fournira une calorie à l'aide de laquelle on pourra reproduire le phénomène A sans nouvelle dépense, et ainsi de suite. Or, chaque fois que le phénomène B est produit par le phénomène A, il y a un excédant de 25 kilogrammètres : on pourrait donc, avec une dépense initiale de une calorie, obtenir un travail infini. Un tel résultat est contraire aux lois de la nature.

Le chiffre 425 kilogrammètres a été déduit d'expériences précédemment citées et pour quelques-unes desquelles nous donnerons plus tard les conditions générales de l'expérimentation. Pour le moment, nous allons donner le calcul à l'aide duquel M. Person l'a déduit de l'élasticité des gaz.

Prenons 1 mètre cube d'air à zéro degré et sous la pression $p$ par mètre carré. Soient $\pi$ le poids de cette masse d'air, $c_v$ sa chaleur spécifique à volume constant, $\alpha$ son coefficient de dilatation. Si l'on chauffe cette masse d'air de manière que sa température s'élève de 1°, mais sans que son volume augmente, la pression deviendra $p(1+\alpha)$. Si on établit la communication du volume avec un espace vide, d'une capacité égale à la fraction $\alpha$ du mètre cube, la pression redeviendra égale à $p$. Or, nous sommes dans le cas de l'expérience de Gay-Lussac et de Joule (citée n° 30), où la détente a lieu dans le vide, c'est-à-dire sans communication de chaleur et sans travail extérieur; donc la température ne changera pas. D'autre part, supposons qu'on chauffe à 1° le même volume d'air pris à 0° et sous la pression $p$ et qu'on lui permette, cette fois, de se dilater librement. Il faudra lui fournir une quantité de chaleur égale à $\pi c_p$, $c_p$ désignant la chaleur spécifique à pression constante. Le volume deviendra $1+\alpha$ à la pression $p$, et la température sera 1°. Dans le second cas, bien que le gaz soit dans le même état, à la fin de l'expérience, que dans le premier, on n'a pas donné la même quantité de chaleur que dans la première expérience, parce que nous avons supposé que l'enveloppe cédait d'elle-même sous la pression du gaz, de sorte qu'il y a eu un travail extérieur effectué résultant de l'augmentation de volume $\alpha$ sous la pression $p$. Ce travail est égal à $\alpha p$ (V. au n° 56), et, si E est l'équivalent mécanique de la chaleur, ce travail répond à la quantité de chaleur $\frac{\alpha p}{E}$, évaluée en calories. C'est précisément la diffé-

rence entre les quantités de chaleurs données respectivement à l'air dans les expériences précédentes. On a donc $\pi(c_p - c_v) = \frac{\alpha p}{E}$. Si on prend $p = 10^k,334$, $\pi = 1^k,293$, $c_v = 0,1686$, d'après Laplace; $c_p = 0,2377$, d'après M. Regnault; on trouve 424 kilogrammètres pour la valeur de E.

32. Capacité calorifique a volume constant. — La détermination des capacités calorifiques à volume constant est très-délicate. La méthode de Clément et Désormes est en défaut, à cause du travail extérieur effectué par le gaz; aussi ne l'avons-nous pas décrite. Plus généralement, on se sert de la méthode de Dulong, qui consiste à déduire $c_v$ de la vitesse du son dans les gaz, mais elle n'est pas exempte de la même cause d'erreur.

Si pour E on adopte le nombre 425, parce qu'il est le plus probable d'après la discussion des mesures effectuées de l'équivalent mécanique de la chaleur, on pourra se servir de la formule précédente,

$$c_p - c_v = \frac{\alpha p}{E\pi},$$

pour déterminer $c_v$. Le second membre est une constante; donc les lois des capacités calorifiques à pression constante sont les mêmes pour les capacités calorifiques à volume constant.

*La capacité calorifique à volume constant pour un gaz parfait est indépendante de la pression et de la température.*

# CHAPITRE IV

## EXPRESSION DE LA QUANTITÉ DE CHALEUR NÉCESSAIRE POUR UN CHANGEMENT D'ÉTAT.

33. Conclusion des chapitres précédents. — Nous nous sommes attaché à résumer les résultats de la physique expérimentale. Nous avons vu que la physique ne considère qu'un état particulier des corps : celui où la pression est normale et uniforme sur leur surface et où la température est uniforme dans leur masse, cette température et cette pression pouvant d'ailleurs varier avec le temps. Tout incomplètes que soient les études, même à ce point de vue restreint, nous avons pu en conclure que l'état d'un corps est caractérisé par une fonction de la température de sa masse, de la pression normale à sa surface et du volume de l'unité de poids de ce corps. Nous représenterons cette fonction par

$$F(t, p, v) = 0.$$

On a pu voir encore que les gaz naturels et même les vapeurs diffèrent peu de ce que nous avons appelé les gaz parfaits, pour lesquels la fonction précédente devient

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t).$$

Enfin nous avons été amené à dire que des phénomènes thermiques équivalent à des phénomènes mécaniques. Ces idées ont dans la science toute la précision désirable et il est bon désormais de s'habituer aux raisonnements qui les rendront fécondes ; mais, comme méthode, il est utile de montrer que, sans faire d'hypothèses sur la nature de la chaleur, on peut, par l'analyse, calculer la quantité de chaleur nécessaire pour un changement d'état déterminé.

34. Capacité calorifique a volume constant. — Supposons que le volume spécifique $v$ est invariable et donnons à $t$ un accroissement $\Delta t$, il en résulte, à cause de l'équation $F(t, p, v) = 0$, un accroissement

$\Delta p$ pour $p$. Nous dirons que le corps a passé de l'état $(t, p, v)$ à l'état $(t + \Delta t, p + \Delta p, v)$. Soit $\Delta Q$ la quantité de chaleur qu'il faut donner au corps pour qu'il subisse ce changement d'état. Si $\Delta Q$ est négatif, c'est qu'au lieu de donner de la chaleur au corps il faut lui en prendre. $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ est la quantité de chaleur moyenne pour un degré d'élévation de température de $t$ à $t + \Delta t$, le volume ne variant pas; c'est la chaleur spécifique moyenne à volume constant entre l'état $(t, p, v)$ et $(t+\Delta t, p+\Delta p, v)$.

$$\lim. \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = C_v$$

est la chaleur spécifique à volume constant pour l'état $(t, p, v)$.

$$\frac{dQ}{dt}\, dt = C_v\, dt$$

est la quantité de chaleur qu'il faut donner au corps pour passer de l'état $(t, p, v)$ à l'état $(t+dt, p+dp, v)$; elle est évaluée en prenant $t$ pour variable indépendante.

35. Chaleur latente de dilatation. — Supposons que la température est invariable, et donnons à $v$ un accroissement $\Delta v$. Il en résulte, à cause de l'équation $F(t, p, v) = 0$, un accroissement $\Delta p$ pour $p$. Nous dirons que le corps passe de l'état $(t, p, v)$ à l'état $(t, p+\Delta p, v+\Delta v)$. Soit $\Delta Q$ la quantité de chaleur qu'il faut donner au corps pour qu'il subisse ce changement d'état. $\frac{\Delta Q}{\Delta v}$ est la quantité de chaleur moyenne pour une augmentation de volume égale à l'unité depuis $v$ jusqu'à $v+dv$. Puisque la température ne varie pas, $\Delta Q$ passe à l'état latent. $\frac{\Delta Q}{\Delta v}$ est la chaleur latente moyenne de dilatation entre les états $(t, p, v)$ et $(t, p+\Delta p, v+\Delta v)$.

$$\lim. \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \frac{dQ}{dv} = l$$

est la chaleur latente de dilatation pour l'état $(t, p, v)$.

$$\frac{dQ}{dv}\, dv = l\, dv$$

est la quantité de chaleur qu'il faut donner au corps pour passer de l'état $(t, p, v)$ à l'état $(t, p+dp, v+dv)$; elle est évaluée en prenant $v$ pour variable indépendante.

36. Chaleur spécifique a pression constante. — Soit $dQ$ la quan-

tité de chaleur qu'il faut donner au corps pour qu'il passe de l'état $(t, p, v)$ à l'état $(t+dt, p, v+dv)$. Prenons $t$ pour variable indépendante.

$$\frac{dQ}{dt} = C_p$$

est la chaleur spécifique à pression constante.

$$C_p\, dt$$

est la chaleur nécessaire à la transformation.

37. CHALEUR LATENTE RELATIVE A LA VARIATION DE PRESSION. — Soit $dQ$ la quantité de chaleur qu'il faut donner au corps pour qu'il passe de l'état $(t, p, v)$ à l'état $(t, p+dp, v+dv)$. Prenons $p$ pour variable indépendante.

$$\frac{dQ}{dp} = h$$

est la chaleur latente relative à la variation de pression.

$$h dt$$

est la chaleur nécessaire à la transformation.

38. — Reprenons la transformation du n° 34. On peut exprimer d'une autre manière la quantité de chaleur nécessaire à cette transformation. Prenons $p$, au lieu de $t$, pour variable indépendante, et posons

$$\frac{dQ}{dp} = Y.$$

La quantité de chaleur nécessaire au passage de l'état $(t, p, v)$ à l'état $(t+dt, p+dp, v)$ peut s'écrire

$$\frac{dQ}{dp}\, dp = Y dp.$$

39. — Reprenons la transformation du n° 35 en prenant $v$, au lieu de $p$, pour variable indépendante. Posons

$$\frac{dQ}{dv} = X.$$

La quantité de chaleur nécessaire au passage de l'état $(t, p, v)$ à l'état $(t, p+dp, v+dv)$ peut s'écrire

$$\frac{dQ}{dv}\, dv = X dv.$$

40. QUANTITÉ DE CHALEUR NÉCESSAIRE POUR UN CHANGEMENT D'ÉTAT INFINIMENT PETIT QUELCONQUE.

1° *Prenons t et v pour variables indépendantes.*

Faisons varier $t$ et laissons $v$ constant; $p$ prendra, en vertu de l'équation $f(t, p, v) = 0$ la variation $\frac{dp}{dt}\,dt$, quand $t$ variera de $dt$. En effet, $p$ peut être considéré comme une fonction des variables $t$ et $v$, et $\frac{dp}{dt}\,dt$ est la variation de $p$ correspondante à celle de $t$, $v$ restant constant.

Si l'on fait varier $v$, laissant $t$ constant, la variation de $p$ est $\frac{dp}{dv}\,dv$.

Quand $t$ et $v$ varient à la fois, $p$ prend l'accroissement $\frac{dp}{dt}\,dt$, correspondant à la variation de $t$, et l'accroissement $\frac{dp}{dv}\,dv$, correspondant à la variation de $v$. La somme de ces deux accroissements est l'accroissement total ou la différentielle totale de $p$, quand $t$ et $v$ varient à la fois. Si $dp$ représente cette différentielle totale, on a

$$dp = \frac{dp}{dt}\,dt + \frac{dp}{dv}\,dv.$$

Pour passer de l'état $(t, p, v)$ (1) à l'état $(t+dt, p+\frac{dp}{dt}dt, v)$ (2), il faut donner au corps la quantité de chaleur, $C_v\,dt$, d'après le n° 34. Passons maintenant de ce dernier état à celui que l'on obtiendrait en y faisant varier $v$; alors, $t$ et $v$ variant à la fois, $p$ varie de sa différentielle totale $dp$, d'après ce que nous venons de rappeler. Le nouvel état est donc $(t+dt,\ p+\frac{dp}{dt}\,dt+\frac{dp}{dv}\,dv, v+dv)$ ou $(t+dt, p+dp, v+dv)$ (3); il représente un changement d'état infiniment petit quelconque. Pour passer de (2) à (3), on fait seulement varier $v$ et $p$ dans (2), comme au n° 35; la quantité de chaleur nécessaire pour cette transformation est donc $ldv$. Ici $l$ est la chaleur latente de dilatation pour l'état (2); mais elle est la même que la chaleur latente pour l'état $(t, p, v)$. En effet, $l$ est fonction de $t, p, v$, et, si l'on donne à $t$ l'accroissement $dt$ et à $p$ l'accroissement $\frac{dp}{dt}\,dt$, il ne peut en résulter pour $l$ qu'un accroissement de premier ordre, comme ceux de $t$ et de $p$. Cet accroissement disparaît devant $l$, qui est une quantité finie, quand on évalue la quantité $ldv$.

En définitive, pour passer de l'état (1) à l'état (3), il faut une quantité

de chaleur

$$(a) \qquad dQ = C_v dt + l dv.$$

$C_v$ et $l$ correspondant à l'état (1).

41. — 2° *Prenons t et p pour variables indépendantes.* — En raisonnant comme précédemment et en nous reportant aux nos 36 et 37, on a

$$(b) \qquad dQ = C_p dt + h dp.$$

pour la quantité de chaleur nécessaire au passage de l'état $(t, p, v)$ à l'état $(t+dt, p+dp, v+dv)$.

42. 3° *Prenons p et v pour variables indépendantes.* — La quantité de chaleur nécessaire pour le même changement d'état sera :

$$(c) \qquad dQ = X dv + Y dp.$$

43. Relations entre les chaleurs spécifiques et les chaleurs latentes. — Si $dt, dp, dv$ sont les mêmes dans les équations $(a), (b), (c)$, la quantité $dQ$ est la même dans les trois équations. Les seconds membres ne diffèrent qu'en raison du changement de variables indépendantes. Aussi les coefficients différentiels $C_v$, $l$, $C_p$, $h$, X, Y ne sont-ils pas indépendants les uns des autres. Cherchons les deux principales relations entre ces quantités. Pour cela, dans l'équation $(a)$ changeons les variables indépendantes; au lieu de $t$ et $v$, prenons $t$ et $p$, comme dans la formule $(b)$. $v$ étant alors fonction de $t$ et $p$, on a :

$$dv = \frac{dv}{dt} dt + \frac{dv}{dp} dp.$$

L'équation $(a)$ devient

$$dQ = \left(C_v + l \frac{dv}{dt}\right) dt + l \frac{dv}{dp} dp.$$

En égalant les coefficients différentiels de cette équation et leurs correspondants dans l'équation $(b)$, on a

$$C_p = C_v + l \frac{dv}{dt},$$

$$h = l \frac{dv}{dp}.$$

44. Remarque sur l'intégration des formules $(a)$, $(b)$, $(c)$. — $dQ$ n'est pas une différentielle exacte des variables indépendantes.

Par exemple, considérons l'équation $dQ = C_v dt + l dv$; pour que $dQ$ soit différentielle exacte de $v$ et $t$, il faudrait que l'on ait

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dC_v}{dv};$$

Nous verrons plus tard que cette condition ne peut pas être remplie.

La quantité de chaleur Q, nécessaire pour une transformation finie, ne dépend donc pas seulement des conditions initiales et des conditions finales, à la manière des intégrales de différentielles exactes; cette quantité Q dépend en outre des états intermédiaires par lesquels passe le système.

45. **Formule de la détente d'un gaz parfait qui ne reçoit et ne dégage pas de chaleur.** — Appliquons les formules de ce chapitre à la détente d'un gaz parfait qui ne reçoit et ne dégage pas de chaleur. Il suffit de placer le gaz dans une enceinte dénuée absolument de conductibilité. C'est le contraire de ce que nous avons supposé quand un gaz se détend suivant la loi de Mariotte. Dans le cas qui nous occupe, la quantité de chaleur nécessaire à la transformation considérée, ne pouvant être empruntée aux corps environnants, est prise à la masse du gaz lui-même; la température subit donc des variations. Ecrivons que $dQ = o$, nous aurons, en prenant l'équation $(a)$, par exemple :

$$C_v dt + l dv = 0.$$

Or, la chaleur latente $l$ est liée aux capacités calorifiques par l'équation générale

$$C_p = C_v + l\frac{dv}{dt}.$$

De l'équation

$$pv = p_o v_o (1 + \alpha t),$$

on déduit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha p_o v_o}{p} = \frac{\alpha v}{1 + \alpha t},$$

en remplaçant $p$ par sa valeur en fonction de $v$ et de $t$

On a donc

$$l = (C_p - C_v) : \frac{dv}{dt} = (C_p - C_v)\frac{1 + \alpha t}{\alpha v}.$$

Remplaçons $l$ par sa valeur dans la première équation, elle devient

$$(C_p - C_v)\frac{dv}{v} + C_v \frac{\alpha dt}{1 + \alpha t} = 0.$$

L'intégrale du premier membre est une somme de logarithmes que l'on doit égaler à une constante arbitraire.

On peut donc écrire l'intégrale générale sous la forme

$$\log B (1 + \alpha t)^{C_v} v^{C_p - C_v} = 0,$$

B étant une constante arbitraire. Remplaçons $1 + \alpha t$ par sa v on a

$$\log \frac{B}{p_0^{C_v} v_0^{C_v}} p^{C_v} v^{C_p} = 0.$$

Le produit $p^{C_v} v^{C_p}$ est donc constant si le gaz subit des tr mations quelconques sans absorber ni dégager de chaleur. C'e de Poisson.

Si nous désignons par $\mu$ une constante arbitraire telle que

$$- \log \frac{B}{p_0^{C_v} v_0^{C_v}} = \mu,$$

on a

$$\log p^{C_v} v^{C_p} = \mu.$$

# DEUXIÈME PARTIE

## LES DEUX THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR

---

## CHAPITRE PREMIER

### APPLICATION DU THÉORÈME DES FORCES VIVES A UN SYSTÈME MATÉRIEL PLACÉ DANS L'ÉTHER

46. De l'éther. — La chaleur et la lumière se transmettent à travers les espaces vides de matières pondérables; elles traversent certains corps; tous les corps sont plus ou moins bons conducteurs de la chaleur; il y a une relation remarquable entre les phénomènes calorifiques, les phénomènes de la lumière et les phénomènes mécaniques simultanés; de ces phénomènes et d'autres encore, on a été conduit à considérer la chaleur et la lumière comme dues à des vibrations particulières d'un fluide universel appelé éther. L'éther est un fluide répandu dans l'espace et qui pénètre tous les corps; il est donc incoercible et sa masse ne peut être obtenue par le moyen d'une pesée.

Les phénomènes de la réfraction ne peuvent recevoir d'explication qu'en supposant à l'éther, dans un corps, une densité moyenne différente de celle qu'il a dans le vide de matières pondérables. Supposons que les molécules pondérables attirent les molécules de l'éther, il en résulte que chaque molécule pondérable est en quelque sorte entourée d'une atmosphère d'éther dont la densité décroît rapidement. Nous devrons supposer ensuite que les molécules d'éther se repoussent mutuellement, tandis que les molécules pondérables s'attirent entre elles. C'est de l'attraction des molécules pondérables entre elles et de la répulsion des atmosphères d'éther dont elles sont entourées, que résultent les forces moléculaires dont nous constatons journellement les

effets. Si $m$ et $m'$ sont les masses de deux molécules de matières pondérables dont la distance est $r$, la force que l'une exerce sur l'autre et réciproquement est une fonction de la distance $r$ que nous représenterons par $mm'\rho(r)$, en tenant compte de la répulsion des atmosphères d'éther et de l'attraction des deux masses considérées.

47. Un système de points matériels pondérables, considérés avec l'éther qui les entoure, peut recevoir deux sortes de vibrations. Dans les unes, l'éther seul est en mouvement; dans les autres, l'éther et les molécules pondérables s'entraînent mutuellement. C'est l'ensemble de tous ces mouvements vibratoires qui constitue la chaleur.

Les vibrations d'un pareil système se communiquent à l'éther qui est répandu dans l'espace; les ondes, en tombant sur un autre système modifient son état calorifique. C'est en cela que consiste la transmission de la chaleur par rayonnement.

La transmission de la chaleur par contact s'explique d'une manière analogue.

Les vibrations calorifiques peuvent entraîner un changement d'état d'un corps ou un travail extérieur, et inversement. On conçoit, par exemple, que par le frottement, les molécules de deux corps en contact entrent en vibration et qu'il y ait production de mouvements vibratoires calorifiques.

La chaleur considérée comme un mouvement vibratoire rentre dans les lois générales de la mécanique, et la thermodynamique est l'étude des relations entre les phénomènes calorifiques, leurs causes, leurs effets, en prenant pour base les principes et les théorèmes de la mécanique rationnelle.

Avant d'aborder l'objet principal de ce chapitre, nous allons nous occuper de deux questions importantes : celle de l'évaluation du travail des forces intérieures dans un système quelconque et celle de l'évaluation de la force vive en tenant compte des mouvements vibratoires.

48. Travail des forces intérieures. — Soient M $(x,y,z)$ et M' $(x',y',z')$ deux points situés à une distance $MM' = r$. Soit $mm'\rho(r)$ la force qu'ils exercent mutuellement l'un sur l'autre; supposons-la attractive, c'est-à-dire dirigée de l'un des points vers l'autre. La droite MM' fait avec les axes de coordonnés rectangulaires OX, OY, OZ, des angles dont les cosinus sont respectivement $\frac{x'-x}{r}, \frac{y'-y}{r}, \frac{z'-z}{r}$. Conséquemment les composantes, suivant les trois axes, de l'attraction du point M' sur le point M sont

$$mm'\varphi(r)\frac{x'-x}{r}, \qquad mm'\varphi(r)\frac{y'-y}{r}, \qquad mm'\varphi(r)\frac{z'-z}{r}.$$

Le travail d'une force est égal à la somme des travaux de ses composantes. Si donc $dx$, $dy$, $dz$ sont les projections sur les axes rectangulaires du déplacement du point M le travail de la force $\rho\,(r)$ est

$$mm'\varphi(r)\left[\frac{x'-x}{r}\,dx+\frac{y'-y}{r}\,dy+\frac{z'-z}{r}\,dz\right].$$

Le travail de la force d'attraction du point M sur le point M′ sera, en tenant compte du sens de cette force,

$$-mm'\varphi(r)\left[\frac{x'-x}{r}\,dx'+\frac{y'-y}{r}\,dy'+\frac{z'-z}{r}\,dz'\right].$$

La somme de ces deux travaux est

$$-mm'\varphi(r)\,\frac{(x'-x)(dx'-dx)+(y'-y)(dy'-dy)+(z'-z)(dr'-dr)}{r}.$$

Or

$$r=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},$$

et $dr$ est égal à la fraction qui multiplie $mm'\,\rho\,(r)$; on a donc, pour le travail des forces mutuelles s'exerçant entre deux points,

$$-mm'\varphi(r)\,dr=-mm'\frac{d\psi(r)}{dr}\,dr,$$

où $\psi\,(r)$ représente la fonction qui a pour dérivée $\rho\,(r)\,dr$.

49. Pour un système de points matériels, le travail des forces intérieures est égal à

$$-\Sigma\,mm'\frac{d\psi(r)}{dr}\,dr=-d\Sigma\,mm'\psi(r).$$

Posons $-\Sigma\,mm'\,\psi\,(r)=f$. Cette fonction est appelée *fonction des forces*; sa différentielle est égale au travail des forces intérieures pour un déplacement infiniment petit.

Supposons qu'un système déterminé ne soit soumis à aucune force extérieure. Appliquons-lui le théorème des forces vives; l'accroissement de forces vives est

$$\Sigma\,\frac{mv_1^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}.$$

Cette expression doit être égale au travail des forces intérieures. Le travail des forces intérieures pour un déplacement infiniment petit du système est $df$. Ce travail pour un déplacement fini sera donc $f_1-f_0$, en représentant par $f_0$ et $f_1$ les valeurs de la fonction des forces, au

commencement et à la fin du déplacement considéré. On a donc :

$$\Sigma\frac{mv_1^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=f_1-f_0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\Sigma\frac{mv_1^2}{2}-f_1=\Sigma\frac{mv_0^2}{2}-f_0.$$

Cela étant vrai pour deux états quelconques du système, on peut dire : *Dans tout système qui n'est soumis à aucune force extérieure, la différence entre la force vive et la valeur correspondante de la fonction des forces est constante.*

Représentons par C cette constante et écrivons

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-f=C, \tag{1}$$

pour un état quelconque du système.

50. — On démontre que la fonction $f$ passe par un maximum pour un état d'équilibre stable du système. Supposons qu'elle a plusieurs maxima; on pourra toujours supposer que le grand maxima est zéro; en effet, $\varphi(r)$ renferme une constante arbitraire, et, par conséquent, $f$ en renferme une aussi; si on la détermine par la condition que nous venons d'énoncer, la constante C sera changée, mais l'équation (1) sera toujours vraie. La fonction $-f$ représente alors le travail positif que les forces moléculaires devraient effectuer si le système passait de l'état actuel à l'état d'équilibre stable défini par le plus grand maximum.

Les deux parties de l'équation ayant une somme constante, si l'une d'elle augmente, l'autre diminue. C'est pour cela que M. Rankine a proposé pour $-f$ le nom d'*énergie potentielle;* c'est en effet le travail moléculaire maximum en puissance dans le système.

51. Evaluation des forces vives. — Supposons qu'un système possède en même temps un mouvement sensible et un mouvement vibratoire périodique. Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées rectangulaires d'un point géométrique qui aurait le même *mouvement sensible* qu'un point matériel $m$ du système et dont ce dernier ne s'écarterait que de très-petites quantités, par suite du mouvement vibratoire. Les coordonnées du point $m$ peuvent être représentées par $x+\xi, y+\eta, z+\zeta$, en désignant $\xi$, $\eta$, $\zeta$ des quantités très-petites.

La vitesse du point $m$ a pour composantes

$$\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt},\ \frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt},\ \frac{dz}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}.$$

La force vive de ce point est

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right].$$

Elle est variable avec le temps. Nous allons en chercher la valeur moyenne pendant un temps infiniment petit.

Définissons d'abord cette moyenne. La force vive à une époque donnée est $\frac{1}{2}mv^2$. Prenons deux axes de coordonnées rectangulaires; portons le temps en abscisse et la puissance vive correspondante en ordonnée. On obtiendra une courbe dont l'aire, pour un temps égal à $\theta$, sera $\int_o^\theta \frac{1}{2}mv^2dt$. L'ordonnée moyenne, c'est-à-dire celle qui, multipliée par le temps $\theta$, reproduirait l'aire de la courbe, est

$$\frac{1}{\theta}\int_o^\theta \frac{1}{2}mv^2dt.$$

Supposons que le temps $\theta$ est infiniment petit du premier ordre, de telle sorte que l'on puisse négliger les variations de $x$ et de ses dérivées; supposons, en outre, que le temps $\theta$ est très-grand par rapport à la durée d'une période du mouvement vibratoire, ce qui revient à supposer que celle-ci est du second ordre. En d'autres termes, la position et la vitesse du point géométrique ne changent pas pendant la durée d'un très-grand nombre de vibrations, et celles-ci ont une vitesse finie et une amplitude du même ordre que leur durée, c'est-à-dire infiniment petite par rapport à $\theta$. Remplaçons $v^2$ par sa valeur et développons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\int_o^\theta \frac{1}{2}mv^2dt = {}& \frac{1}{\theta}\int_o^\theta \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]dt\\ &+\frac{1}{\theta}\int_o^\theta \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]dt\\ &+\frac{1}{\theta}\int_o^\theta m\left(\frac{dz}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)dt.\end{aligned}$$

Or, $\frac{dx}{dt}$ étant considéré comme constant,

$$\frac{1}{\theta}\int_o^\theta \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2dt=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2;$$

$$\frac{1}{\theta}\int_o^\theta m\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}dt=\frac{1}{\theta}m\frac{dx}{dt}\int_o^\theta \frac{d\xi}{dt}dt=\frac{1}{\theta}m\frac{dx}{dt}\Big[\xi\Big]_o^\theta.$$

$\left[\xi\right]_o^\theta$ égale au plus l'amplitude d'une vibration, et cela quand $\theta$ est un multiple de la durée de celle-ci ; c'est donc un infiniment petit relativement à $\theta$. Il reste donc, après les calculs :

$$\frac{1}{\theta}\int_o^\theta \frac{1}{2}mv^2\,dt = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{\theta}\int_o^\theta \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]dt,$$

ce qui donne lieu à l'énoncé suivant : *La force vive à une époque donnée est égale à la somme de la force vive sensible, celle du mouvement sensible, et de la moyenne de la force vive du mouvement vibratoire.*

52. INFLUENCE DU MOUVEMENT VIBRATOIRE SUR LA FONCTION DES FORCES. — La fonction $f$ est fonction des distances mutuelles et, par conséquent, des coordonnées des points du système. Le mouvement vibratoire modifie la valeur de la fonction des forces à une époque donnée, sans qu'il y ait pour cela de modification apparente dans les positions relatives que doivent avoir les points du système en vertu du mouvement sensible. Soient $x, y, z, x', y', z'\ldots$ les coordonnées des positions moyennes des points du système, c'est-à-dire des positions que ces points occuperaient dans le mouvement sensible s'il n'y avait pas de mouvement vibratoire. La fonction des forces a pour expression :

$$f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, x'+\xi',\ldots) = f(x, y, z, x'\ldots) + f'_x\xi + f'_y\eta + f'_z\zeta + \ldots$$
$$+\frac{1}{2}\left[f''_{x^2}\xi^2 + f''_{y^2}\eta^2 + f''_{z^2}\zeta^2 + 2f''_{yz}\xi^2 + \ldots\right] + \ldots$$

Si on prend la valeur moyenne de la fonction des forces pendant le temps $\theta$, comme au numéro précédent, on voit que les termes du premier degré en $\xi$, $\eta$, $\zeta$ disparaissent, tandis que les autres termes donnent, en général, une variation de la fonction des forces.

53. APPLICATION DU THÉORÈME DES FORCES VIVES A UN SYSTÈME MATÉRIEL PLACÉ DANS L'ÉTHER. — Appliquons le théorème des forces vives à un système composé de points matériels pesants soumis à l'action de l'éther. Supposons d'abord que la transformation considérée n'est accompagnée d'aucune communication de chaleur avec l'extérieur.

L'accroissement des forces vives est égal à l'accroissement de la *force vive sensible* $\Sigma\frac{1}{2}mv_2^2 - \Sigma\frac{1}{2}mv_1^2$, augmenté de l'accroissement de la force vive du mouvement vibratoire, que nous représenterons par $V_2 - V_1$.

Le travail des forces se compose du travail des forces extérieures, $\Sigma TF$, et du travail des forces intérieures représenté par $f_2 - f_1$.

On a donc, en réunissant les termes,

$$\Sigma\left(\tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2\right) + V_2 - V_1 = \Sigma TF + f_2 - f_1.$$

M. Rankine a donné les noms suivants à différents termes de cette équation :

$-f$ est l'*énergie potentielle*.

$\Sigma\frac{1}{2}mv^2 + V$ est l'*énergie actuelle*, qui se compose de l'énergie sensible et de l'énergie vibratoire.

$\Sigma\frac{1}{2}mv^2 + V - f$ est l'*énergie totale*.

$V - f$ est l'*énergie intérieure*, c'est-à-dire l'énergie d'un système s'il n'avait pas de mouvement sensible et paraissait être au repos.

Par la lettre U, nous désignerons l'énergie totale ou l'énergie intérieure, suivant le cas, en ayant soin d'indiquer laquelle des deux.

54. — Supposons que le système matériel pesant soit isolé dans l'éther, c'est-à-dire qu'il n'ait aucune communication de chaleur avec les corps extérieurs et qu'il ne subisse l'action d'aucune force provenant de ces mêmes corps. L'énergie totale du système ne reçoit évidemment aucune variation. On a :

$$\Sigma\tfrac{1}{2}mv_2^2 + V_2 - f_2 = \Sigma\tfrac{1}{2}mv_1^2 + V_1 - f_1 = U.$$

Supposons maintenant qu'en passant de l'état de 1 à l'état 2 le corps ait été soumis à l'action de forces extérieures, dont le travail est $\Sigma TF$, mais qu'il n'ait eu aucune communication de chaleur. Pendant ce passage, l'énergie totale se sera accrue de $\Sigma TF$, car, d'après l'équation du n° 53,

$$\Sigma\tfrac{1}{2}mv_2^2 + V_2 - f_2 = \Sigma\tfrac{1}{2}mv_1^2 + V_1 - f_1 + \Sigma TF.$$

Suivant quelles lois le travail extérieur se transforme-t-il en force vive sensible, en force vive du mouvement vibratoire, en variation de la fonction des forces? C'est ce qu'on ignore à peu près. — Dans les machines industrielles, les variations de la fonction des forces et les mouvements vibratoires ont une faible importance; on les néglige, en s'efforçant de rester dans les conditions où les pièces ne se déforment pas notablement.

Supposons ensuite que le système ne soit soumis à l'action d'aucune force extérieure, mais qu'il reçoive une quantité Q de chaleur. On ignore suivant quelles lois cette quantité de chaleur se transforme en force vive sensible, en force vive du mouvement vibratoire, en variation de la fonction des forces; mais, ce que l'on sait positivement,

# CHAPITRE II

## PREMIER THÉORÈME DE LA THERMODYNAMIQUE. — ÉQUIVALENCE DE LA CHALEUR ET DU TRAVAIL.

58. Équivalent mécanique de la chaleur. — Le premier principe de la thermodynamique est celui de l'équivalence du travail et de la chaleur. Son expression est renfermée dans l'équation des forces vives que nous avons généralisée, en admettant, d'après l'expérience, la transformation de la chaleur en forces vives, en travail des forces intérieures ou des forces extérieures, et inversement. Ce théorème va maintenant nous fournir les indications nécessaires à la détermination expérimentale et au calcul de l'équivalent mécanique de la chaleur.

Rappelons sommairement quelques-unes des expériences dont on a déduit le nombre E.

Expériences de M. Joule. — Les expériences de M. Joule ont porté sur les liquides : l'eau et le mercure. L'appareil était construit comme nous allons le dire, mais il était en laiton pour l'eau et en fer et fonte pour le mercure. Le réservoir est un calorimètre isolé; il a la forme d'un cylindre vertical portant à ses parois des palettes fixes dirigées suivant des plans diamétraux. Ces palettes présentent des échancrures rectangulaires, qui livrent passage à des palettes rectangulaires mobiles, entraînées par un axe vertical qui coïncide avec l'axe géométrique du cylindre. Ces dernières palettes sont destinées à l'agitation du liquide pendant la rotation de l'axe. Les palettes fixes sont surtout destinées à annuler la force vive sensible du liquide quand la rotation cesse à la fin de l'expérience.

Du travail dépensé à mettre l'appareil en mouvement, on retranche le travail du frottement des pièces métalliques, et l'on a le travail exercé sur le liquide. On note l'élévation de température du liquide ; on observe la perte de chaleur qui résulte de la conductibilité et du rayonnement de l'appareil, et l'on en conclut la quantité de chaleur équivalente au travail exercé sur le liquide.

Pendant la durée de l'expérience, le liquide n'a eu aucune communication de chaleur avec l'extérieur, puisqu'on le suppose parfaitement

isolé et que, dans tous les cas, on tient compte de ce qu'il perd par rayonnement et par conductibilité. Il résulte de cela que $Q = 0$.

L'énergie a subi une variation qui se traduit presque exclusivement par l'élévation de température du liquide, que l'on a eu soin de corriger. En effet, il n'y a pas d'énergie sensible, puisque le mouvement du liquide est nul à la fin de l'expérience; il n'y a qu'une très-faible variation de la fonction des forces, puisque la masse liquide étant considérable, l'élévation de température est faible. La variation d'énergie peut être mesurée en unités mécaniques. Soit $q$ la quantité de chaleur, évaluée en calories, qui répond à l'élévation de température : $Eq$ est la mesure de la variation d'énergie, et l'on a $Eq = \Sigma TF$.

Dans une autre série d'expériences, M. Joule a mesuré la quantité de chaleur dégagée par le frottement de deux *cônes de friction* en fonte de fer.

Voici les valeurs obtenues pour E :

| | |
|---|---|
| Frottement de l'eau sur elle-même et sur le laiton. . . . . | 424,9 |
| Frottement du mercure sur lui-même et sur le fer . . . . . | 425<br>426,3 |
| Frottement de la fonte sur elle-même dans le mercure . . . | 426,7<br>425,6 |

59. Expériences de M. Hirn. — M. Hirn a suivi une marche inverse; il a cherché à déterminer le travail produit par une certaine quantité de chaleur dépensée dans une machine à vapeur à condensation. Soit $Q_2$ la quantité de chaleur contenue dans la vapeur à son entrée dans le cylindre. Une partie $Q_1$ de cette chaleur est absorbée par l'eau froide du condenseur. $Q_2 - Q_1$ est transformée en travail des pressions normales que les parois du cylindre exercent sur la vapeur. Pour déterminer ce travail, M. Joule se servait d'un indicateur de Watt. D'autre part, $Q_2$ est déterminé d'après la formule de M. Regnault (N° 27).

On peut supposer que c'est la même masse d'eau qui se transforme en vapeur, passe sous le piston de la machine et va au condenseur pour retourner ensuite à la chaudière. La machine ayant un mouvement périodique, on pourra considérer, après un nombre entier de périodes, que l'accroissement de l'énergie est nul, l'état final étant identique à l'état initial. Donc il est permis d'écrire

$$\int p\,dv = E(Q_2 - Q_1).$$

La méthode de M. Hirn est très-remarquable, mais elle ne permet pas un calcul exact de E. Parmi les difficultés qu'elle présente, il faut signaler surtout celle de la mesure du travail des forces extérieures.

Elle a, en outre, l'inconvénient de faire porter la mesure directe sur la quantité $Q_2 - Q_1$ qui est très-petite relativement à E pour un nombre limité de périodes.

Les nombres obtenus par M. Hirn varient de 300 à 600; leur moyenne est 415.

60. — Le nombre adopté pour la valeur de E est 425. Nous avons déjà démontré l'invariabilité de l'équivalent mécanique de la chaleur (31). L'équivalence de la chaleur et du travail est maintenant un fait établi.

**Applications du premier théorème.**

61. RELATIONS ENTRE L'ÉNERGIE INTÉRIEURE D'UN CORPS, LES CAPACITÉS CALORIFIQUES ET LES CHALEURS LATENTES. — EXPRESSIONS DE LA QUANTITÉ DE CHALEUR NÉCESSAIRE POUR UN CHANGEMENT D'ÉTAT INFINIMENT PETIT. — De l'équation $dQ = \frac{1}{E}(dU + p\,dv)$ du n° 57, où U représente l'énergie intérieure, nous allons déduire les chaleurs spécifiques et les chaleurs latentes, qui sont, comme nous l'avons vu aux nos 40 et suivants, les coefficients des différentielles des variables indépendantes dans l'expression de $dQ$.

U, étant la différence de la force vive du mouvement vibratoire et de la fonction des forces, est une fonction de la température et du volume spécifique $v$ du corps considéré. On peut encore considérer U comme une fonction des variables $t$ et $p$ ou des variables $v$ et $p$; pour ce changement de variables, on a la relation du n° 33 : $F(t, p, v) = 0$, qui caractérise l'état d'un corps.

$U_{tv}$ indiquera que U est considéré comme une fonction des variables indépendantes $t$ et $v$.

Soit, pour simplifier, A l'inverse du nombre E.

Prenons d'abord $t$ et $v$ pour variables indépendantes :

$$dU = \frac{dU_{tv}}{dt}dt + \frac{dU_{tv}}{dv}dv.$$

Remplaçons $dU$ par sa valeur dans l'équation précédente, on a

$$dQ = A\frac{dU_{tv}}{dt}dt + A\left(\frac{dU_{tv}}{dv} + p\right)dv.$$

En représentant par $C_v$ la capacité calorifique à volume constant, et par $l$ la chaleur latente de dilatation à température constante, on a :

$$(1) \qquad C_v = A\frac{dU_{tv}}{dt},$$

$$(2) \qquad l = A\left(\frac{dU_{tv}}{dv} + p\right);$$

d'où l'on tire

$$dQ = C_v dt + l dv. \tag{3}$$

62. — Prenons $v$ et $p$ pour variables indépendantes :

$$dU = \frac{dU_{vp}}{dv} dv + \frac{dU_{vp}}{dp} dp.$$

Portons cette valeur de $dU$ dans la différentielle $dQ$, on a :

$$dQ = A\left(\frac{dU_{vp}}{dv} + p\right) dv + A \frac{dU_{vp}}{dp} dp.$$

Posons :

$$X = A\left(\frac{dU_{vp}}{dv} + p\right), \tag{4}$$

$$Y = A \frac{dU_{vp}}{dp}; \tag{5}$$

on a

$$dQ = X dv + Y dp. \tag{6}$$

63. — Prenons enfin $t$ et $p$ pour variables indépendantes :

$$dU = \frac{dU_{tp}}{dt} dt + \frac{dU_{tp}}{dp} dp,$$

$$dv = \frac{dv}{dt} dt + \frac{dv}{dp} dp.$$

Portons ces valeurs dans la différentielle $dQ$, on a

$$dQ = A\left(\frac{dU_{tp}}{dt} + p \frac{dv}{dt}\right) dt + A\left(\frac{dU_{tp}}{dp} + p \frac{dv}{dp}\right) dp.$$

Représentons par $C_p$ la chaleur spécifique à pression constante et par $h$ l'autre coefficient différentiel, nous aurons

$$C_p = A\left(\frac{dU_{tp}}{dt} + p \frac{dv}{dt}\right), \tag{7}$$

$$h = A\left(\frac{dU_{tp}}{dp} + p \frac{dv}{dp}\right); \tag{8}$$

d'où l'on tire

$$dQ = C_p dt + h dp. \tag{9}$$

64. Relations de M. Clausius. — Relation entre $C_v$ et $l$. Co

rons les équations (1) et (2), elles donnent

$$\frac{dC_v}{dv} = A\frac{d^2U_{tv}}{dt\,dv},$$
$$\frac{dl}{dt} = A\left(\frac{d^2U_{tv}}{dv\,dt} + \frac{dp}{dt}\right).$$

On en déduit

$$\frac{dl}{dt} - \frac{dC_v}{dv} = A\frac{dp}{dt}. \tag{10}$$

65. Relation entre X et Y. Considérons les équations (4) et (5), elles donnent

$$\frac{dX}{dp} = A\frac{d^2U_{vp}}{dv\,dp} + A,$$
$$\frac{dY}{dv} = A\frac{d^2U_{vp}}{dv\,dp}.$$

On en déduit

$$\frac{dX}{dp} - \frac{dY}{dv} = A. \tag{11}$$

Cette relation fait voir que $dQ$ n'est pas une différentielle exacte de $p$ et $v$, car, si $dQ$ était une différentielle exacte, on aurait

$$\frac{dX}{dp} = \frac{dY}{dv};$$

mais il faudrait pour cela que A fût nul, ce qui n'est pas.

66. — Relation entre $C_p$ et $h$. Considérons les équations (7) et (8), elles donnent

$$\frac{dC_p}{dp} = A\left(\frac{d^2U_{tp}}{dt\,dp} + p\frac{d^2v}{dt\,dp} + \frac{dv}{dt}\right),$$
$$\frac{dh}{dt} = A\left(\frac{d^2U_{tp}}{dp\,dt} + p\frac{d^2v}{dp\,dt}\right).$$

On en déduit

$$\frac{dh}{dt} - \frac{dC_p}{dp} = -A\frac{dv}{dt}. \tag{12}$$

67. Relations entre les chaleurs latentes et les capacités calorifiques. — Aux relations précédentes nous ajoutons celles qui suivent, dont deux ont été établies déjà au n° 43. Considérons les équations (1), (2) et (7). Multiplions l'équation (2) par $\frac{dv}{dt}$, dérivée partielle de $v$ par rapport à $t$, elle devient

$$l\frac{dv}{dt} = A\left(\frac{dU_{tv}}{dv} + p\right)\frac{dv}{dt}.$$

En additionnant membre à membre cette équation et l'équation (1), on a

$$C_v + l\frac{dv}{dt} = A\left(\frac{dU_{tv}}{dv}\frac{dv}{dt} + \frac{dV_{tv}}{dt} + p\frac{dv}{dt}\right).$$

Les deux premiers termes de la parenthèse, dans le second membre, expriment la dérivée partielle de U par rapport à $t$ quand on considère U comme fonction de $t$ et $v$ et que l'on prend pour variables indépendantes $t$ et $p$, car $v$ est alors une fonction de $t$ et $p$. Mais, si l'on considérait U comme fonction de $t$ et $p$, sa dérivée partielle par rapport à $t$ serait $\frac{dU_{tp}}{dt}$. On peut donc écrire

$$C_v + l\frac{dv}{dt} = A\left(\frac{dU_{tp}}{dt} + p\frac{dv}{dt}\right).$$

Le second membre n'est autre que $C_p$. On a donc

$$C_p = C_v + l\frac{dv}{dt}. \tag{13}$$

Des formules (2) et (8) on déduirait

$$h = l\frac{dv}{dp}. \tag{14}$$

Considérons les équations (4) et (5). Multiplions les deux membres de l'équation (5) par $\frac{dp}{dt}$ et remarquons que $\frac{dU_{vp}}{dp}\frac{dp}{dt}$ est égal à $\frac{dU_{tv}}{dt}$ quand on prend $v$ et $t$ pour variables indépendantes, on a

$$Y\frac{dp}{dt} = A\frac{dU_{vp}}{dp}\frac{dp}{dt} = A\frac{dU_{tv}}{dt};$$

donc

$$C_v = Y\frac{dp}{dt}. \tag{15}$$

Considérons maintenant les équations (6) et (7). Multiplions la première par $\frac{dv}{dt}$ et remarquons que $\frac{dU_{vp}}{dv}\frac{dv}{dt}$ est la dérivée partielle de U par rapport à $t$ quand on prend $t$ et $p$ pour variables indépendantes, on a

$$X\frac{dv}{dt} = A\left(\frac{dU_{vp}}{dv}\frac{dv}{dt} + p\frac{dv}{dt}\right),$$

où

$$C_p = X\frac{dv}{dt}. \tag{16}$$

On aurait pu obtenir ces relations en opérant comme au n° 43, c'est-à-dire en changeant de variables dans les différentielles $dQ$ et en identifiant les coefficients des différentielles des variables indépendantes.

68. Résumé. — Le tableau suivant est le résumé des équations qui sont établies jusqu'à présent.

$$F(t, p, v) = 0.$$

$$dQ = A(dU + pdv).$$

(1) $$C_v = A\frac{dU_{tv}}{dt}.$$

(2) $$l = A\left(\frac{dU_{tv}}{dv} + p\right).$$

(3) $$dQ = C_v dt + l dv.$$

(4) $$X = A\left(\frac{dU_{vp}}{dv} + p\right).$$

(5) $$Y = A\frac{dU_{vp}}{dp}.$$

(6) $$dQ = X dv + Y dp.$$

(7) $$C_p = A\left(\frac{dU_{tp}}{dt} + p\frac{dv}{dt}\right).$$

(8) $$h = A\left(\frac{dU_{tp}}{dp} + p\frac{dv}{dp}\right).$$

(9) $$dQ = C_p dt + h dp.$$

(10) $$\frac{dl}{dt} - \frac{dC_v}{dv} = A\frac{dp}{dt}.$$

(11) $$\frac{dX}{dp} - \frac{dY}{dv} = A.$$

(12) $$\frac{dh}{dt} - \frac{dC_p}{dp} = -A\frac{dv}{dt}.$$

(13) $$C_p = C_v + l\frac{dv}{dt}.$$

(14) $$h = l\frac{dv}{dp}.$$

(15) $$C_v = Y\frac{dp}{dt}.$$

(16) $$C_p = X\frac{dv}{dt}.$$

69. Application aux gaz parfaits. — Pour montrer le parti que l'on peut tirer de cette théorie, proposons-nous l'étude de quelques propriétés des gaz parfaits. Les transformations que peut subir un gaz

sont définies par des variables qui satisfont aux équations

$$(a) \qquad pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t), = \alpha p_0 v_0 (a + t), \text{ où } a = \frac{1}{\alpha} = 273,$$

$$dQ = A\,(dU + p\,dv).$$

Mais la fonction U n'est pas connue; il faut joindre à ces équations certaines données déduites de l'expérience. Parmi celles-ci, il est tout naturel de prendre pour point de départ les lois des capacités calorifiques; ces lois ont été l'objet d'études nombreuses à cause des applications que l'on fait des capacités calorifiques. Les nos 24, 25, 31, 32 contiennent un résumé des études d'où il résulte que *les capacités calorifiques des gaz parfaits sont indépendantes de la température et de la pression, et par conséquent aussi du volume spécifique.*

70. Les équations (15) et (16) donnent

$$Y = C_v \frac{dt}{dp}, \qquad X = C_p \frac{dt}{dv}.$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dY}{dv} = \frac{dC_v}{dv}\frac{dt}{dp} + C_v \frac{d^2t}{dp\,dv},$$

$$\frac{dX}{dp} = \frac{dC_p}{dp}\frac{dt}{dv} + C_p \frac{d^2t}{dp\,dv}.$$

Formons l'équation (11) en remarquant que pour les gaz $C_v$ et $C_p$ sont indépendants de $t$, $p$, $v$; on a

$$(C_p - C_v)\frac{d^2t}{dp\,dv} = A.$$

Or, d'après l'équation $(a)$,

$$\frac{d^2t}{dp\,dv} = \frac{1}{\alpha p_0 v_0};$$

donc l'équivalent mécanique de la chaleur est

$$(b) \qquad \frac{1}{A} = E = \frac{\alpha p_0 v_0}{C_p - C_v}.$$

71. Prouvons que l'énergie intérieure d'un gaz n'est fonction que de la température d'une manière explicite. Il suffit pour cela de considérer U comme une fonction de $t$ et d'une autre variable $v$, par exemple, et de prouver que $\frac{dU_{tv}}{dv} = 0$ pour les gaz.

De l'équation (13) on déduit

$$l = (C_p - C_v)\frac{dt}{dv} = (C_p - C_v)\frac{p}{\alpha p_0 v_0},$$

en remplaçant $\frac{dt}{dv}$ par sa valeur tirée de l'équation (*a*). Si l'on remplace $l$ dans l'équation (2), en tenant compte de l'équation (*b*), on a

$$\frac{dU_{tv}}{dv} = 0.$$

En intégrant l'équation différentielle (1), on voit que U est une fonction du premier degré en $t$, car la constante ne doit pas contenir $v$, d'après ce qui précède. On peut donc écrire

$$(c) \qquad A(U_2 - U_1) = C_v(t_2 - t_1).$$

Cette équation signifie que *l'énergie intérieure d'un gaz ne dépend explicitement que de sa température, et que son accroissement est proportionnel à l'accroissement de la température.*

Cette loi a été vérifiée par les expériences de Gay-Lussac et de M. Joule (n° 30); M. Person s'est basé sur ces expériences pour calculer l'équivalent mécanique de la chaleur (n° 31).

72. De la valeur de $l$, déduite au numéro précédent, il résulte la loi suivante :

*La chaleur latente de dilatation des gaz est proportionnelle à la pression.*

$$(d) \qquad l = \frac{C_p - C_v}{\alpha p_o v_o} p = Ap.$$

73. Connaissant la fonction U et la fonction $l$, il est facile d'exprimer $dQ$ au moyen des variables $t, p, v$.

On trouve par l'équation (3)

$$(e) \qquad dQ = C_v dt + \frac{C_p - C_v}{\alpha p_o v_o} p\,dv,$$

ou bien, en remplaçant le coefficient de $p\,dv$ par sa valeur A,

$$dQ = C_v dt + Ap\,dv.$$

74. Dans cette dernière équation, supposons que $dQ = 0$, et remplaçons $p$ par sa valeur tirée de l'équation (*a*), il vient

$$(C_p - C_v)\frac{dv}{v} + C_v \frac{\alpha dt}{1 + \alpha t} = 0.$$

Ce qui donne par l'intégration (n° 45)

$$(f) \qquad \log p^{C_v} v^{C_p} = \mu.$$

Cette équation exprime la loi de Poisson sur la *détente des gaz qui ne reçoivent ni ne dégagent de chaleur.*

75. Pour l'étude des propriétés communes à tous les gaz parfaits, le point de départ le plus naturel fourni par l'expérience est celui-ci :

*Le coefficient de dilatation est le même pour tous les gaz.*

*Le rapport entre la capacité calorifique sous pression constante et le volume spécifique est une même constante pour tous les gaz.*

L'équation (*b*) peut se mettre sous la forme

$$\frac{C_p - C_v}{v_0} = Ap_0.$$

Ce qui prouve que *la différence entre les capacités calorifiques, rapportées à l'unité de volume, est une même constante pour tous les gaz.*

Il résulte de cette loi et de la dernière énoncée précédemment que $\frac{C_v}{v_0}$ est aussi une même constante pour tous les gaz.

| | POIDS SPÉCIFIQUE $\frac{1}{v_0}$ | $C_p$ | $C_p - C_v = Ap_0v_0$ | $C_v = Ap_0v_0$ | $\frac{C_p}{C_v}$ | $\frac{C_v}{v_0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Air. . . . . | 1,293 18 | 0,237 51 | 0,169 3 | 0,068 3 | 1,397 | 0,088 |
| Hydrogène. . . | 0,089 57 | 3,409 0 | 2,394 | 1,015 | 1,405 | 0,088 |

on a identiquement

$$\frac{X}{\varphi'_v} = \frac{Y}{\varphi'_p} = \lambda,$$

$\lambda$ désignant une fonction de $p$ et $v$. On aura donc

$$\frac{X}{\lambda} dv + \frac{Y}{\lambda} dp = \varphi'_v dv + \varphi'_p dp,$$

et par conséquent

$$\frac{dQ}{\lambda} = d\mu.$$

Il y a donc un facteur qui rend $dQ$ différentielle exacte. On doit ajouter qu'il y en a une infinité. Il est évident en effet que

$$\frac{dQ}{\lambda\varphi(\mu)} = \frac{d\mu}{\varphi(\mu)} \tag{17}$$

est une différentielle exacte, car le second membre peut toujours s'intégrer, soit exactement, soit par approximation. Les facteurs propres à rendre $dQ$ différentielle exacte sont donc de la forme $\lambda\varphi(\mu)$. Quand on aura trouvé l'un de ces facteurs, on en obtiendra un autre en multipliant le facteur connu par une fonction quelconque de l'intégrale du second membre de l'équation (6) égalé à zéro.

79. Cherchons le facteur pour les gaz parfaits. Les équations (15) et (16) donnent

$$X = C_p \frac{dt}{dv}, \quad Y = C_v \frac{dt}{dp}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (6), elle devient

$$dQ = C_p \frac{dt}{dv} dv + C_v \frac{dt}{dp} dp.$$

Or l'équation ($a$) donne

$$\frac{dt}{dv} = \frac{p}{\alpha p_o v_o}, \quad \frac{dt}{dp} = \frac{v}{\alpha p_o v_o}.$$

On a donc

$$dQ = \frac{C_p}{\alpha p_o v_o} p dv + \frac{C_v}{\alpha p_o v_o} v dp.$$

Divisons le second membre de cette équation par $pv$ et le premier par $\alpha p_o v_o (a + t)$, qui est égal à $pv$, on a

$$\frac{dQ}{a + t} = C_p \frac{dv}{v} + C_v \frac{dp}{p}.$$

Le second membre est une différentielle exacte. Le facteur $\lambda$ est donc égal à $a + t$ pour les gaz, en ne tenant pas compte d'un facteur constant.

On pourrait partir de l'équation (*e*) du n° 73, remplacer $p$ par sa valeur tirée de (*a*); le second membre exprimerait encore une différentielle exacte si on le divisait par $a + t$. Cela doit être; il suffit de le faire remarquer. De même on pourrait prendre pour variables indépendantes $t$ et $p$.

80. LIGNES DE TRANSFORMATION PRINCIPALES POUR DES CORPS QUELCONQUES. PROPRIÉTÉS DE CES LIGNES. — Les lignes isothermes sont données par l'équation $F(t, p, v) = o$ (n° 19) pour des valeurs particulières de $t$.

Les lignes adiabatiques seront données par la fonction $\mu$ égalée à une constante arbitraire. En effet, on doit avoir $dQ = o$, c'est-à-dire $d\mu = o$ (n° 78); d'où on déduit pour la fonction $\mu$ une valeur constante.

Les lignes d'égale énergie s'obtiendraient en égalant à une constante arbitraire la fonction U (n° 54).

81. Le travail des pressions extérieures égale $\int p dv$. Il est représenté géométriquement par l'aire comprise entre un arc de la courbe qui représente une transformation quelconque et les ordonnées extrêmes. Par exemple, pour la transformation $M_1 M_2$ (fig. 1), le travail des pressions est représenté par $M_1 M_2 M'_2 M'_1$.

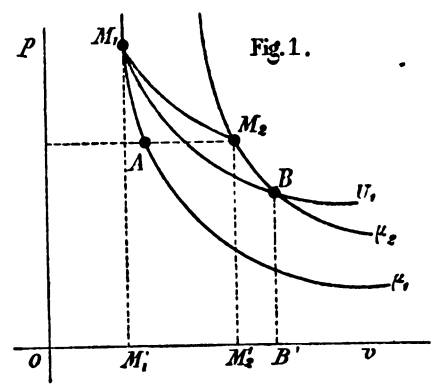


Fig. 1.

Par les points $M_1$ et $M_2$, menons les lignes adiabatiques correspondantes $\mu_1$ et $\mu_2$. Par le point $M_1$ faisons passer la ligne d'égale énergie correspondante $U_1$. Pour la transformation $M_1 M_2$, on a

$$EQ = U_2 - U_1 + \int p\,dv \text{ et } \int p\,dv = \text{aire } M_1 M_2 M'_2 M'_1$$

La ligne $U_1$ et la ligne $\mu_2$ se coupent en B. Supposons que le corps passe de l'état $M_2$ à l'état B, en suivant la ligne adiabatique $\mu_2$. Il n'y a pas dans cette transformation communication de chaleur avec les corps extérieurs; l'énergie, qui est $U_2$ en $M_2$, devient $U_1$ en B, comme en $M_1$, et $U_1 - U_2$ est transformé en travail des pressions qui est représenté par l'aire $M_2 BB'M'_2$. On a donc

$$U_1 - U_2 + \text{aire } M_2 BB'M'_2 = o$$

Remplaçons $U_2 - U_1$ par sa valeur, on voit que la quantité de chaleur Q communiquée au corps pendant la transformation $M_1M_2$, finie ou non, est représentée en unités mécaniques par la somme des aires $M_1M_2M'_2M'_1 + M_2BB'M'_2$.

82. *Si un corps soumis à une pression constante se dilate, quand sa température augmente, il absorbe de la chaleur dans toute transformation infiniment petite représentée par une ligne qui est au-dessus de la ligne adiabatique passant par l'état initial ; il dégage de la chaleur dans le cas contraire.*

Considérons une transformation infiniment petite quelconque représentée, je suppose, par $M_1M_2$, située au-dessus de la ligne adiabatique $\mu_1$, je dis que le corps absorbe de la chaleur pendant cette transformation, dans le premier cas. Menons l'abscisse du point $M_2$; elle rencontre la ligne adiabatique $\mu_1$ au point A. On peut remplacer la transformation $M_1M_2$ par la transformation $M_1AM_2$. En effet, dans ces deux transformations, l'état final du corps est $M_2$, et par conséqueut $U_2 - U_1$ est le même dans les deux transformations. Ensuite l'aire $M_1AM_2$ est un infiniment petit du second ordre; donc l'aire, qui représente le travail des pressions et qui est du premier ordre, est la même, à la limite, dans les deux transformations.

De l'état $M_1$ à l'état A le corps n'a aucune communication de chaleur, puisque la transformation a lieu suivant une ligne adiabatique; mais de A en $M_2$, il absorbe de la chaleur pour se dilater, d'après l'hypothèse. $E\,dQ$ ou $\Delta U + p\,dv$ est donc positif, c'est-à-dire répond à une absorption de chaleur dans le cas considéré.

83. *Deux lignes adiabatiques ne peuvent se rencontrer.* Supposons que $M_1M_2$ et $M_1A$ soient deux lignes adiabatiques se coupant au point $M_1$. Pour passer de l'état $M_1$ à l'état $M_2$, il ne faut ni absorption ni dégagement de chaleur, si le point se déplace sur la ligne $M_1M_2$ que nous supposons être une ligne adiabatique. Or la transformation $M_1M_2$ peut être remplacée par la transformation $M_1AM_2$; de $M_1$ à A il n'y a pas de communication de chaleur, puisque nous supposons que $M_1A$ est une ligne adiabatique ; mais de A à $M_2$ il y aurait absorption de chaleur par le corps en supposant, comme précédemment, qu'il se dilate quand sa température augmente. Ce résultat est en contradiction avec le premier. Il est donc impossible que deux lignes adiabatiques partent du même point.

84. *Toute transformation figurée par une courbe qui va d'une ligne adiabatique à une autre est nécessairement accompagnée d'une communication de chaleur avec l'extérieur.* Il suffit de remarquer qu'il en est ainsi pour une transformation infiniment petite figurée par une courbe telle que $M_1M_2$, qui unit deux lignes adiabatiques $\mu_1$ et $\mu_2$ très-voisines.

85. Transformations reversibles. Cycles. Cycle de Carnot. —

Les transformations que nous considérerons sont celles dites *réversibles ;* cela veut dire qu'elles peuvent s'effectuer dans les deux sens. La réversibilité des transformations thermiques exige le concours de trois circonstances.

1° Le corps considéré doit avoir la même température que le corps avec lequel on le met en contact à une époque déterminée de la transformation. Dans la transformation $M_1M_2$ le corps absorbe de la chaleur ; si la transformation est réversible, il devra l'abandonner de $M_2$ en $M_1$. Si le corps considéré avait été, de $M_1$ en $M_2$, en contact avec des corps extérieurs dont la température eût été supérieure à la sienne, il en eût bien reçu la chaleur nécessaire à la transformation $M_1M_2$ ; mais, dans le passage inverse de $M_2$ en $M_1$, il ne pourrait leur donner la chaleur qu'il doit dégager, car c'est un principe expérimental que *dans une transformation purement thermique, il ne peut passer de chaleur d'un corps plus froid sur un corps plus chaud.*

2° *Les corps extérieurs doivent exercer continuellement une pression égale à la force élastique du corps considéré.*

Dans l'expérience de Joule (n^os^ 30, 71), de l'air comprimé s'échappe dans un récipient où l'on a fait le vide ; cette transformation n'est pas réversible. Il en est de même de la transformation de la vapeur qui sort de la chaudière d'une machine.

3° *Les pressions extérieures doivent être normales,* c'est-à-dire qu'il ne doit pas y avoir de frottement entre le corps considéré et les corps extérieurs. D'après la nature du frottement, d'après ce qu'on observe journellement dans les machines, on sait que les forces de frottement s'exercent en sens contraire du déplacement relatif d'un corps par rapport à un autre sur lequel il frotte ; que le frottement absorbe, dans le sens direct aussi bien que dans le sens inverse de la transformation, une partie du travail des forces extérieures, ou bien qu'il occasionne dans les deux cas un dégagement de chaleur. Il ne peut donc y avoir réversibilité dans une transformation où il y aurait frottement entre le corps considéré et les corps extérieurs.

4° C'est encore un principe expérimental admis que l'*énergie sensible tend à se transformer en énergie calorifique.* D'après cela, de nombreuses transformations ne sont pas réversibles. Ainsi, deux corps en mouvement et qui frottent l'un contre l'autre s'échauffent, mais on sait que si on les chauffe on ne les mettra pas en mouvement.

A l'aide d'une machine de Clarke, on peut faire rougir un fil de platine ; mais en faisant rougir le fil de platine, on ne met pas en mouvement la machine de Clarke.

86. On appelle *cycle* une transformation représentée par une courbe fermée, de telle sorte que l'état initial et l'état final sont identiques.

Pour réaliser une telle transformation, tantôt le corps est en contact avec des corps extérieurs qui lui donnent de la chaleur, tantôt il est en contact avec d'autres corps auxquels il en cède. La différence Q entre ces quantités de chaleur est celle qui entre dans le théorème des forces vives, appliqué aux cycles; le travail des forces extérieures est mesuré par l'aire enveloppée par la courbe fermée qui représente le cycle; l'énergie totale ne subit aucune variation, puisque le corps revient à son état initial; on peut donc écrire

$$EQ = \int p dv.$$

Si l'on parcourt la ligne de transformation de telle sorte que l'aire soit positive, on dit que la transformation s'opère dans le *sens direct*. Le corps considéré transporte de la chaleur de certains corps, parmi lesquels se trouve le corps le plus chaud, sur certains autres où se trouve le plus froid; la quantité de chaleur Q est transformée en travail sur les corps extérieurs; c'est le cas d'une *machine motrice*. Si l'on parcourt la ligne de transformation de telle sorte que l'aire soit négative, la transformation s'opère dans le sens inverse du précédent. Le corps considéré opère un transport de chaleur inverse du précédent, et la quantité de chaleur Q est créée par le travail des forces extérieures. C'est la machine précédente renversée; *elle crée de la chaleur par le travail* (voir au n° 98).

Le cycle de Carnot est le plus important. Il se compose de deux lignes isothermes AB, DC, définies par les températures $t_1$ et $t_2$, et de deux lignes adiabatiques AD, BC, définies par les valeurs particulières $\mu_1$ et $\mu_2$ de la fonction $\mu$. Le corps qui se tranforme dans le *sens direct*, suivant un cycle de Carnot, ne prend de chaleur qu'à la source à la température supérieure $t_2$, et n'en cède qu'à la source à la température inférieure $t_1$. Le travail des forces extérieures, quand la transformation s'opère dans le sens direct ABCD, est représenté par l'aire ABCDA; cette aire se compose de l'aire positive A'ABCC' diminuée de l'aire C'CDAA', de telle sorte qu'elle est positive. La transformation suivant un cycle de Carnot est réversible, en tenant compte des restrictio

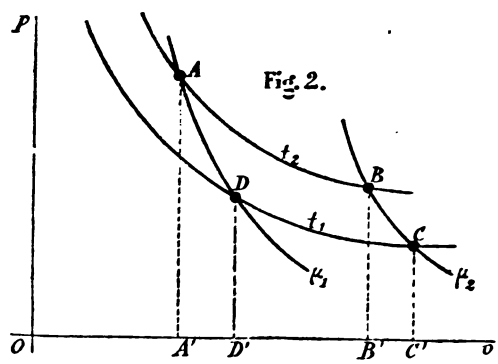


Fig. 2.

que nous avons faites dans les numéros précédents (n° 76 et suivants) et d'où il résulte que le cycle de Carnot ne peut être réalisé expérimentalement.

### Deuxième théorème fondamental de la thermodynamique ou théorème de Carnot.

87. Théorème de Carnot. — Nous avons établi l'équivalence entre une quantité de chaleur et le travail correspondant, et nous avons remarqué que la science sait peu de choses sur la transformation de la chaleur ou du travail en énergie; cela fait l'objet des deux précédents chapitres. Enfin, nous venons de voir qu'il y a transport de chaleur quand un corps se transforme suivant un cycle. Le théorème de Carnot n'est autre qu'une des lois qui gouvernent ce transport; il peut s'énoncer ainsi :

*Pour tous les corps qui se transforment suivant des cycles de Carnot, dans le sens direct et entre les mêmes températures extrêmes, il y a un rapport constant entre la quantité de chaleur transportée de la source la plus chaude à la source la plus froide et la quantité de chaleur transformée en travail.*

Les lignes isothermes sont définies pour chaque corps par les températures extrêmes $t_1$ et $t_2$, mais elles ne sont pas identiques, car une ligne isotherme dépend non-seulement de la température, mais encore de la nature du corps. Remarquons encore que le théorème de Carnot est vrai quand on parcourt les cycles dans le sens contraire à celui qui est indiqué dans l'énoncé, seulement le transport de chaleur a lieu de la source la plus froide à la source la plus chaude.

Pour démontrer le théorème de Carnot, démontrons qu'il est vrai pour deux corps quelconques. Soient, pour l'un, $Q_2$ la quantité de chaleur qu'il prend à la source à la température $t_2$, $Q_1$ celle qu'il abandonne à la source à la température $t_1$; pour l'autre, $Q'_2$ la quantité de chaleur qu'il prend à la source à la température $t_2$, $Q'_1$ celle qu'il abandonne à la source à la température $t_1$. La quantité de chaleur transformée en travail est, pour le premier corps, $Q_2 - Q_1$, et pour le second, $Q'_2 - Q'_1$.

Si $m$ et $n$ désignent des nombres entiers, soit $\frac{m}{n}$ le rapport des quantités de chaleur transformées en travail ou bien un rapport qui en diffère très-peu dans le cas où ces quantités de chaleur seraient incommensurables. Ecrivons

$$\frac{m}{n} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1}.$$

Il faut démontrer que l'on a aussi $\frac{Q_1}{Q'_1} = \frac{m}{n}$.

Supposons d'abord que l'on ait $mQ'_1 - nQ_1 > 0$. Associons les deux corps pour n'en faire qu'un système, mais de telle manière que le premier parcoure $n$ fois son cycle dans le sens direct, et que le second parcoure le sien $m$ fois dans le sens inverse. Le premier corps transportera une quantité de chaleur $nQ_1$ de la source à la température $t_2$ à la source à la température $t_1$; le second transportera une quantité de chaleur $mQ'_1$ de la source à la température $t_1$ à la source à la température $t_2$.

A la fin de cette opération, chaque corps est revenu à son état primitif, puisqu'il a parcouru son cycle un nombre entier de fois. De plus, d'après l'hypothèse, $n(Q_2 - Q_1) - m(Q'_2 - Q'_1) = 0$; ce qui veut dire que le travail des forces extérieures sur les deux corps considérés ensemble est nul. Il y aurait donc transport d'une quantité de chaleur $mQ'_1 - nQ_1$ de la source la plus froide sur la source la plus chaude, sans qu'il y ait de changement dans le système intermédiaire, sans qu'il y ait de travail dépensé.

On arriverait à la même conclusion, en supposant $nQ_1 - mQ'_1 > 0$ et en parcourant le cycle du second corps dans le sens direct et le cycle du premier corps en sens contraire.

Une telle conclusion est inadmissible, parce qu'*il ne peut passer de chaleur d'un corps plus froid sur un corps plus chaud sans qu'il se produise quelque phénomène mécanique équivalent*. On a donc démontré que

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{Q_1}{Q'_1}. \tag{21}$$

88. Remarque sur cette démonstration. — Cette démonstration, due à M. Clausius, n'est pas exempte de difficultés. Elle s'appuie en réalité sur les lois mécaniques de l'équilibre de température, qui ne sont pas connues. De plus la considération de sources infinies et parfaitement conductrices ne se prête à aucune vérification expérimentale.

Il est préférable d'admettre, comme un principe qui sera vérifié par ses applications indirectes, ce théorème que Carnot a deviné en assimilant la quantité de chaleur $Q_2$ à un poids qui tombe d'une hauteur figurée par $t_2 - t_1$, en passant du corps le plus chaud sur le corps le plus froid. Son idée était d'ailleurs incomplète en ce qu'il ne tient pas compte de ce fait que $Q_2$ ne passe pas intégralement d'une des sources sur l'autre, mais qu'une partie de cette chaleur est transformée en travail.

Remarquons encore que dans cette démonstration et dans celle (n° 31) où nous établissons que l'équivalent mécanique de la chaleur est constant, nous nous appuyons en définitive sur l'axiome célèbre formulé par Lavoisier : *Rien ne se perd, rien ne se crée dans la nature.*

**Application du deuxième théorème fondamental.**

89. Détermination de la fonction d'intégrabilité. — Nous avons vu, au n° 78, qu'on peut toujours poser $dQ = \lambda d\mu$, où la différentielle $d\mu$ est exacte et $\lambda$ est une fonction des variables indépendantes. Soient $\mu_1 = \mu$ et $\mu_2 = \mu + d\mu$ deux lignes adiabatiques voisines; $\lambda_2$ la valeur de $\lambda$ au point A, $\lambda_1$ sa valeur au point D (fig. 2, n° 86); $\lambda_2$ variera infiniment peu de A à B, et $\lambda_1$ variera infiniment peu de D à C, puisque les lignes adiabatiques sont infiniment voisines par hypothèse. Pour la transformation AB, on aura $Q_2 = \lambda_2 d\mu$. Pour la transformation DC, on aura $Q_1 = \lambda_1 d\mu$. La valeur de $d\mu$ est la même dans ces deux transformations, puisqu'elles ont lieu entre les mêmes lignes adiabatiques. On a donc

$$\lim \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Or, d'après l'équation (21) $\frac{Q_2}{Q_1}$ est le même pour tous les corps, il ne dépend pas des fonctions $\mu$ et $d\mu$ qui déterminent les lignes adiabatiques; il ne dépend que des températures extrêmes $t_1$ et $t_2$.

La valeur du rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ aux points tels que A et D de deux lignes isothermes, qui se trouvent sur une même ligne adiabatique, ne dépend que des températures $t_1$ et $t_2$ des lignes isothermes.

La forme générale de $\lambda$, pour un corps donné, est donc celle d'une fonction de la température, qui est la même pour tous les corps, multipliée par $\varphi(\mu)$, particulière et arbitraire pour chaque corps. La fonction de la température est connue pour les gaz, c'est $a + t$; comme elle est la même pour tous les corps, on a

$$\lambda = (a + t)\varphi(\mu). \tag{22}$$

La première conséquence que nous tirons du théorème de Carnot est celle-ci :

*Parmi les fonctions d'intégrabilité il y en a une, fonction de la température seule, qui est la même pour tous les corps.*

90. Température absolue. — La fonction $a + t = 273 + t$, que l'on représente par T, s'appelle la *température absolue*. Le *zéro absolu* serait à — 273 degrés du thermomètre à air, si l'air était un gaz parfait; en réalité il en diffère fort peu, et bien que l'expression T soit une fonction compliquée de la température indiquée par le thermomètre à air, les deux échelles diffèrent très-peu.

La considération de la température absolue simplifie les énoncés de la thermodynamique.

Le zéro absolu indique une température telle que, si la plus basse, qui se réalise dans un cycle fini, est précisément ce zéro absolu, il devient impossible de transformer intégralement en chaleur une quantité de travail donnée. Dans cette opération il y a, en effet, transport de chaleur des corps les plus froids sur les corps les plus chauds, et les corps à la température du zéro absolu ne pourraient abandonner de chaleur. Pour $T = 0$ on aurait $dQ = 0$; il n'y aurait donc pas communication de chaleur suivant la ligne isotherme $T = 0$, ce qui est le contraire de ce qui doit avoir lieu (n° 76, 82).

A plus forte raison ne peut-on faire descendre la température au-dessous du zéro absolu.

Le théorème de Carnot donne donc

$$dQ = T d\mu, \tag{23}$$

T étant le facteur d'intégrabilité commun à tous les corps.

91. Équations de William Thomson. — M. Thomson a déduit de l'équation (23) plusieurs relations importantes.

Prenons T et $v$ pour variables indépendantes, l'équation (3) (n° 68) devient

$$dQ = C_v dT + l dv$$

ou

$$d\mu = \frac{dQ}{T} = \frac{C_v}{T} dT + \frac{l}{T} dv.$$

Cette expression étant une différentielle exacte, on a

$$\frac{d\frac{C_v}{T}}{dv} = \frac{d\frac{l}{T}}{dT},$$

ou

$$T\frac{dC_v}{dv} = T\frac{dl}{dT} - l.$$

Tirons la valeur de $l$ et tenons compte de l'équation (10)

$$l = AT\frac{dp}{dT}. \tag{24}$$

92. Prenons $v$ et $p$ pour variables indépendantes; l'équation (6)

donne

$$d\mu = \frac{dQ}{T} = \frac{X}{T}dv + \frac{Y}{T}dp;$$

d'où

$$\frac{d\frac{X}{T}}{dp} = \frac{d\frac{Y}{T}}{dv}.$$

En développant et en intervertissant les termes, on a

$$X\frac{dT}{dp} - Y\frac{dT}{dv} = T\left(\frac{dX}{dp} - \frac{dY}{dv}\right).$$

En vertu de l'équation (11)

$$X\frac{dT}{dp} - Y\frac{dT}{dv} = AT. \tag{25}$$

93. Prenons enfin T et $p$ pour variables indépendantes; l'équation (9) donne

$$d\mu = \frac{dQ}{T} = \frac{C_p}{T}dt + \frac{h}{T}dp,$$

d'où

$$\frac{d\frac{C_p}{T}}{dp} = \frac{d\frac{h}{T}}{dT},$$

ou

$$T\frac{dC_p}{dp} = T\frac{dh}{dT} - h,$$

et en tenant compte de l'équation (12)

$$h = -AT\frac{dv}{dT}. \tag{26}$$

94. QUANTITÉ DE CHALEUR NÉCESSAIRE POUR UNE TRANSFORMATION SUIVANT UNE LIGNE ISOTHERME. — Puisque T est constant sur une ligne isotherme, si on appelle $\mu_1$ et $\mu_2$ les valeurs de la fonction $\mu$ pour deux points donnés d'une ligne isotherme, on aura pour une transformation entre ces deux points et suivant la ligne isotherme qui les joint :

$$Q = T(\mu_2 - \mu_1). \tag{27}$$

95. ÉQUATION DE RANKINE. — Rankine a donné une autre expression de cette quantité de chaleur. Soit S la surface comprise entre une

ligne isotherme, l'axe des abscisses et les ordonnées passant par les points extrêmes de la transformation s'effectuant suivant cette ligne isotherme ; on a

$$S = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv.$$

Prenons une seconde ligne isotherme infiniment voisine de la première et limitée aux mêmes ordonnées. Si nous prenons $v$ et T pour variables indépendantes, la variation de S, quand on passe de la première ligne isotherme à la seconde, est

$$\frac{dS}{dT} = \int_{v_1}^{v_0} \frac{dp}{dT}\, dv,$$

puisque les limites sont les mêmes. L'équation générale (3)

$$dQ = C_v\, dT + l\, dv$$

se réduit, sur une ligne isotherme, à $dQ = l\, dv$.

D'après l'équation (24)

$$dQ = AT \frac{dp}{dT}\, dv,$$

ou bien

$$Q = AT \int \frac{dp}{dT}\, dv.$$

On en déduit

(28) $$Q = AT \frac{dS}{dT}.$$

96: Résumé.

(17) $$\frac{dQ}{\lambda} = d\mu,$$

(18) $F(t, p, v) = o$, ligne isotherme si $t$ est constant.

(19) $\mu =$ constante, ligne adiabatique.

(20) U = constante, ligne d'égale énergie.

(21) $$\frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{Q_1}{Q'_1} = \frac{Q_2}{Q'_2},$$

(22) $\lambda = T\, \varphi(\mu)$

ce facteur $\lambda$ est celui de l'équation (17), multiplié par une fon

quelconque de $\mu$, car

$$\frac{dQ}{\lambda_1\varphi(\mu)} = \frac{d\mu}{\varphi(\mu)},$$

$\lambda_1$ étant un facteur tel que $\frac{dQ}{\lambda_1} = d\mu$,

(23) $$dQ = T\,d\mu$$

(24) $$l = AT\frac{dp}{dT},$$

(25) $$X\frac{dT}{dp} - Y\frac{dT}{dv} = AT,$$

(26) $$h = -AT\frac{dv}{dT},$$

(27) $Q = T(\mu_1 - \mu_2)$, sur une ligne isotherme.

(28) $Q = AT\frac{dS}{dT}$, sur une ligne isotherme.

# TROISIÈME PARTIE

## APPLICATIONS DES DEUX THÉORÈMES FONDAMENTAUX

---

## CHAPITRE PREMIER

### GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES A FEU. — MACHINES A GAZ.

97. GÉNÉRALITÉS. RENDEMENT D'UNE MACHINE. — On appelle *coefficient économique* ou *rendement* d'une machine à feu le rapport de la quantité de chaleur transformée en travail à la quantité de chaleur prise aux sources de chaleur.

Considérons une machine à feu fonctionnant suivant un cycle de Carnot (fig. 2, n° 86). La machine prend à la source à la plus haute température $t_2$, une quantité $Q_2$ de chaleur ; elle abandonne à la source à la température la plus basse $t_1$, une quantité de chaleur $Q_1$. La quanité de chaleur transformée en travail est $Q_2 - Q_1$. Si S représente l'aire positive ABCD, on a

$$S = E(Q_2 - Q_1)$$

Si toute la quantité $Q_2$ était transformée en travail, on aurait pour le travail de la machine l'expression $EQ_2$. Le rendement peut donc s'exprimer au moyen des quantités de chaleur, comme nous l'avons dit ; c'est

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}.$$

Cette expression prend une forme remarquable pour le cycle de Carnot. En effet, d'après l'équation (27) on a $Q_2 = T_2(\mu_2 - \mu_1)$, $Q_1 = T_1(\mu_2 - \mu_1)$, ce qui donne

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{t_2 - t_1}{a + t_2}.$$

*Le rendement d'une machine fonctionnant suivant un cycle de Carnot, dépend uniquement des températures extrêmes entre lesquelles fonctionne la machine.*

Si $t_2 = 150°$, si $t_1 = 27°$, le rendement est égal à 0,29...

On voit par là qu'il est avantageux d'avoir des valeurs élevées pour $t_2$.

98. Considérons maintenant une machine fonctionnant suivant un cycle quelconque. Pour concevoir une telle machine, il faut supposer que le corps se transforme en contact avec une source à température variable, qui donne au corps de la chaleur pendant une partie de la transformation, et avec une source servant de *réfrigérant*, à laquelle le corps abandonne de la chaleur pendant le reste de la transformation.

Soit *abcd* un cycle quelconque. Circonscrivons-lui deux courbes isothermes $t_2$ et $t_1$, puis deux courbes adiabatiques $\mu_2$ et $\mu_1$; ce qui donne un cycle de Carnot, ABCD circonscrit au proposé. Supposons que le corps, qui se transforme dans le sens direct, soit dans les conditions du n° 82; $t_2$ désigne la température la plus élevée et $t_1$ la température la moins élevée de celles qui sont réalisées dans le cycle; le corps absorbe de la chaleur suivant la transformation *dab*, parce que chaque élément de cette transformation est au-dessus de la ligne adiabatique qui passe par l'origine de cet élément. Pour la raison contraire, le corps dégage de la chaleur pendant le reste de la transformation, représenté par *bcd*.

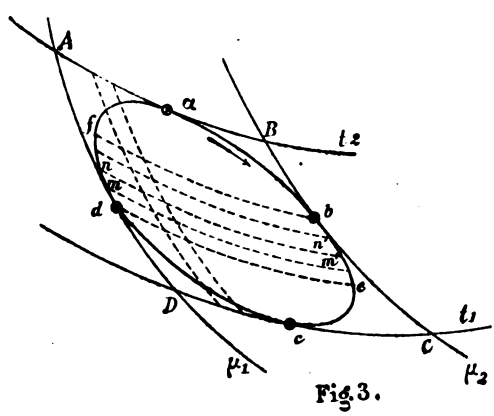


Fig. 3.

Entre les lignes adiabatiques $\mu_1$, $\mu_2$ menons-en d'autres qui soient infiniment voisines. Elles divisent le cycle *abcd* en éléments pour chacun desquels répond ou une absorption de chaleur ou un dégagement de chaleur de la forme $dQ = T d\mu$. L'absorption répondra à une valeur de $d\mu$ et, par suite, de $dQ$ positive; le dégagement répondra au contraire à $d\mu$ négatif. Dans chaque différentielle $dQ$ positive, remplaçons T par la température absolue la plus grande $a + t_2 = T_2$, on aura

$$\int \frac{dQ}{T} < \int \frac{dQ}{T_2} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dQ}{T} > \frac{Q_2}{T_2};$$

car $T_2$ étant constante dans la seconde intégrale, sa valeur est la somme des quantités de chaleur $dQ$ absorbées, somme que nous représenterons par $Q_2$. Dans chaque différentielle négative remplaçons T par la température absolue minimum $T_1$, nous aurons

$$-\int\frac{dQ}{T} > -\int\frac{dQ}{T_1} \quad \text{ou} \quad -\int\frac{dQ}{T} < \frac{Q_1}{T_1},$$

en représentant par $Q_1$ la quantité absolue de chaleur dégagée par le corps.

Mais, pour une transformation qui s'accomplit suivant un cycle entier, on a nécessairement

$$\int\frac{dQ}{T} = 0,$$

puisque les limites de l'intégrale donnent les mêmes valeurs de la fonction $\mu$. Distinguons les deux sommes que nous venons d'effectuer par les signes + ou — mis au bas du signe de l'intégration, nous aurons pour le cycle complet *abcd*

$$\int_{+}\frac{dQ}{T} + \int_{-}\frac{dQ}{T} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} < 0,$$

ce qui donne

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

La première partie est le rendement de la machine fonctionnant suivant un cycle quelconque entre les températures extrêmes $T_2$ et $T_1$; la seconde est le rendement d'une machine fonctionnant entre les mêmes températures, mais suivant un cycle de Carnot. Le premier rendement est plus petit que le second. *Le cycle de Carnot répond donc au coefficient économique maximum.*

99. Régénérateurs de chaleur. — Le cycle de Carnot est d'une réalisation impossible; aussi on a cherché à élever le rendement des machines au moyen de *régénérateurs de chaleur*.

Par les points de contact *b* et *d* menons les lignes isothermes *fb*, *de*; puis entre celles-ci menons-en d'autres qui soient infiniment voisines. Deux éléments correspondants tels que *mn*, *m'n'*, déterminés sur le cycle *abcd* par deux lignes isothermes infiniment voisines, sont tels

que la température de la source et celle du réfrigérant sont les mêmes, T par exemple. On peut concevoir qu'un corps extérieur, à la température T, reçoive tout ou partie de la chaleur $dq_1$ que le corps abandonne suivant la transformation $n'm'$ et que ce corps extérieur restitue plus tard à la machine une certaine quantité de chaleur pour former en partie la quantité $dq_2$ qu'elle doit absorber, à la température T, suivant l'élément $mn$.

Le corps extérieur qui recueille pour une phase de la transformation la chaleur dégagée dans une autre est un régénérateur de chaleur.

100. Remarquons que, malgré l'emploi d'un régénérateur, le coefficient économique est en général inférieur à celui du cycle de Carnot. En effet, plaçons-nous dans le cas le plus favorable, c'est-à-dire celui où toute la quantité de chaleur cédée au régénérateur suivant *be* est restituée tout entière à la machine pendant la transformation *df*. Dans l'intégrale $\int \frac{dQ}{T} = 0$, faite pour le cycle entier, les éléments correspondant aux parties *be*, *df*, disparaissent comme étant égaux et de signes contraires. Si $Q_2$ est la quantité de chaleur absorbée suivant *fab*, on aura pour cette partie

$$\int \frac{dQ}{T} > \frac{Q_2}{T_2}.$$

Si $Q_1$ est la quantité de chaleur cédée au réfrigérant suivant *ecd* (et qui est définitivement perdue, puisqu'on ne peut la recueillir utilement pour la machine), on aura pour l'intégrale correspondante à *ecd*

$$-\int \frac{dQ}{T} > \frac{Q_1}{T_1}.$$

On a donc encore

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

101. Pour qu'on puisse réaliser le coefficient économique maximum, il suffit de deux conditions : 1° la quantité de chaleur $dq_1$ doit être égale à la quantité de chaleur correspondante $dq_2$, et le régénérateur doit fonctionner d'une manière parfaite; 2° l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$ pour la partie *fab* doit être égale à $\frac{Q_2}{T_2}$, ce qui aura lieu pour $T = T_2$, c'est-à-dire qu'il faut que *fab* soit une ligne isotherme; pour une raison analogue, il faut que *ecd* soit une ligne isotherme. Cette seconde condition

revient à dire que la machine doit fonctionner entre deux lignes isothermes.

Pour réaliser la première condition, traçons, entre ces lignes isothermes AB, DC, une ligne de transformation quelconque DA, et cherchons quelle ligne BC il faut tracer entre les lignes isothermes pour fermer le cycle. La figure de ce cycle est analogue à celle du cycle de Carnot, mais DA et BC ne désignent plus des lignes adiabatiques. Pour un élément $mn$ de la première, on a $dq_2 = M(C_v dt + l dv)$, M désignant le poids du corps qui se transforme; pour l'élément $m'n'$ de la seconde, correspondant à $mn$, c'est-à-dire compris entre les deux mêmes lignes isothermes infiniment voisines, on a

$$dq_1 = M(C'_v dt + l' dv').$$

L'équation différentielle de la seconde ligne s'obtiendra en égalant $dq_2$ à $dq_1$.

Puisque DA est arbitraire, on peut réaliser la combinaison qui nous occupe d'une infinité de manières. Un cycle qui satisfait aux conditions précédentes est aussi avantageux que celui de Carnot au point de vue du rendement, mais il demande l'emploi d'un régénérateur.

102. Machines a gaz fonctionnant suivant un cycle de Carnot. — Pour les gaz parfaits, on connaît les équations des lignes de transformation et, par conséquent, on peut calculer toutes les circonstances du mouvement d'une machine à gaz parfait. Considérons une transformation suivant un cycle de Carnot (fig. 2).

Toute la chaleur fournie par la source le long de la ligne AB est transformée en travail représenté par l'aire A'ABB'. Elle est égale à $Q_2 = MT_2(\mu_2 - \mu_1)$ (équation 23), où M désigne le poids du gaz. D'après l'équation $(f)$ n° 74, si l'on appelle $p_1$, $v_1$ les coordonnées du point A, on pourra écrire

$$\mu_1 = \log p_1 {}^{C_v} v_1 {}^{C_p};$$

si $p_2$, $v_2$ sont les coordonnées de B, on aura de même

$$\mu_2 = \log p_2 {}^{C_v} v_2 {}^{C_p}.$$

Par conséquent

$$\mu_2 - \mu_1 = \log \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{C_v} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{C_p}.$$

Mais le gaz se détendant suivant une ligne isotherme on a, d'après la loi de Mariotte (n° 7), $p_1 v_1 = p_2 v_2$. Si on élimine le rapport $\frac{p_2}{p_1}$ de l'équa-

tion précédente, on a

$$\mu_2 - \mu_1 = (C_p - C_v) \log \frac{v_2}{v_1}.$$

On peut donc écrire, en tenant compte de l'équation (*b*) des gaz

$$Q_2 = MA\varkappa p_0 v_0 T_2 \log \frac{v_2}{v_1}.$$

Suivant la ligne adiabatique BC, il y a diminution de l'énergie int rieure qui se transforme en travail extérieur sans communication chaleur avec l'extérieur. D'après l'équation (*c*) des gaz, cette variati d'énergie correspond à une quantité de chaleur telle que

$$MC_v(T_2 - T_1).$$

Le long de la ligne isotherme CD, le gaz dégage une quantité chaleur égale à

$$Q_1 = MA\varkappa p_0 v_0 T_1 \log \frac{v_3}{v_4},$$

en appelant $v_3$ et $v_4$ les abscisses des points C et D.

Enfin le long de la ligne adiabatique DA, l'énergie intérieure au mente d'une quantité qui équivaut à la quantité de chaleur

$$MC_v(T_2 - T_1).$$

Cette dernière expression prouve que le travail effectué par la déten suivant la ligne adiabatique BC est égal au travail dépensé pour fai fonctionner la machine pendant la seconde période de compression D La quantité de chaleur disparue est donc la différence des quantit de chaleur répondant aux deux autres périodes.

D'après la loi de Mariotte, on a

$$v_1 p_1 = v_2 p_2 \quad \text{et} \quad v_3 p_3 = v_4 p_4;$$

D'après la loi de Poisson, on a

$$p_1^{C_v} v_1^{C_p} = p_4^{C_v} v_4^{C_p} \quad \text{et} \quad p_2^{C_v} v_2^{C_p} = p_3^{C_v} v_3^{C_p}.$$

L'élimination des pressions conduit à $\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}$. De sorte qu'on a

$$Q_2 - Q_1 = MA\varkappa p_0 v_0 (T_2 - T_1) \log \frac{v_2}{v_1}.$$

Le travail représenté par l'aire curviligne ABCD est donc

$$M\varkappa p_0 v_0 (T_2 - T_1) \log \frac{v_2}{v_1}.$$

On pourrait d'ailleurs le chercher directement.

103. Des régénérateurs pour les gaz. — Les machines à gaz ne pouvant être construites suivant le cycle de Carnot, on emploie des régénérateurs, et pour cela on cherche à satisfaire à la condition $dq_1 = dq_2$ (n° 101). Or $C_v''$ est constant pour les gaz et $l = Ap$ (équation $(d)$ des gaz), on a donc

$$dq_1 = M(C_v dt + Ap\,dv),$$
$$dq_2 = M(C_v dt + Ap'dv').$$

La condition à remplir est donc $p\,dv = p'dv'$. Mais les points $(p, v)$, $(p', v')$ étant sur une même ligne isotherme $mm'$ (fig. 3) on a, d'après la loi de Mariotte, $pv = p'v'$. La condition à remplir est donc $\frac{dv}{v} = \frac{dv'}{v'}$ où $v = kv'$; ce qui donne $p' = kp$.

Si donc on se donne une ligne de transformation quelconque $\psi(p, v) = 0$ entre deux lignes isothermes, la ligne de tranformation correspondante sera

$$\psi\left(kv', \frac{p'}{k}\right) = 0.$$

104. Machine de Stirling. — Dans la machine de Stirling, on prend pour $\psi$ l'équation $v = v_1$. La courbe correspondante est $kv' = v_1$. Le cycle se compose donc de deux lignes isothermes et de deux lignes parallèles à l'axe $op$.

Suivant AB, ligne isotherme à la température $T_2$, le foyer fournit au gaz de la chaleur qui se transforme en travail extérieur. Soit $v_2$ le volume en B; la ligne BC a pour équation $kv_2 = v_1$ ou $v_2 = \frac{v_1}{k}$. De B en C le gaz se refroidit à volume constant et cède de la chaleur au régénérateur. Suivant la ligne isotherme CD, à la température $T_1$, le gaz est ramené à son volume primitif $v_1$ qu'il avait en A; le travail extérieur est employé à cette compression du gaz, en même temps que celui-ci cède au réfrigérant une quantité de chaleur qui est perdue pour le jeu de la machine. De D en A le gaz est mis en contact avec le régénérateur qui l'échauffe à volume constant jusqu'à ce que sa pression et sa température soient redevenues ce qu'elles sont en A, et une nouvelle période recommence.

105. Machine d'Ericsson. — Dans cette machine on prend pour $\psi$ l'équation $p = p_1$. La courbe correspondante est $p' = kp_1 = p_2$. Le cycle se compose donc de deux lignes isothermes et de deux lignes parallèles à l'axe $ov$.

La réalisation des machines à gaz est très-imparfaite, du moins

pour les fortes puissances, où la plus grande difficulté consiste à avoir un foyer qui chauffe d'une manière bien régulière, et à avoir une alimentation d'air constante. Les machines à air chaud se composent en général d'un récipient placé sur le foyer et où l'air est chauffé. Ce récipient est alimenté par le fonctionnement d'un piston dans le récipient lui-même ou dans un cylindre distinct. L'air chaud agit ensuite sur un piston qui fait mouvoir l'arbre de la machine.

En combinant les mouvements des deux pistons, on obtient à peu près l'une ou l'autre des deux dispositions que nous venons d'indiquer. Dans le circuit de l'air se trouve le régénérateur composé de toiles métalliques.

Les machines à explosion de gaz ont reçu des applications plus nombreuses que les machines à air chaud, qui n'ont surtout été employées que pour de petites industries. Leur théorie peut s'établir à l'aide des formules démontrées précédemment. Nous ne pouvons nous étendre davantage sur ces engins.

# CHAPITRE II

## ÉTUDE DES VAPEURS

106. Chaleurs latentes de vaporisation. — Nous sommes obligé de distinguer deux chaleurs latentes de vaporisation, suivant la manière dont s'effectue la vaporisation. Cherchons la quantité de chaleur nécessaire pour produire 1 kilogramme de vapeur saturée à $t + 0^\circ$ et à la pression constante $p$.

Supposons d'abord que le liquide éprouve l'ébullition normale sous la pression $p$, à la température $t$. La transformation est représentée par une ligne droite parallèle à l'axe $ov$; elle consiste en une augmentation considérable du volume du liquide pendant qu'il se vaporise à la pression $p$.

*Surchauffons* la vapeur en la portant à $t + \theta$ sans changer la pression; ce résultat s'obtient par une dilatation de l'enveloppe égale à celle qu'éprouve la vapeur. Soient L' la chaleur latente de vaporisation à l'ébullition normale, $C'_p$ la chaleur spécifique de la vapeur à la pression constante $p$; la chaleur nécessaire à la transformation est

$$L' + \int_t^{t+\theta} C'_p \, dt.$$

Supposons, au contraire, que c'est le liquide que l'on chauffe de la température $t$ à la température $t + \theta$, sous la pression constante $p$, sans le vaporiser; ce qui se fera en l'enfermant dans une enveloppe dont le volume intérieur augmente exactement de la dilatation du liquide sous la pression $p$ et pour la température $t + \theta$. Cette première transformation demande une dépense de chaleur égale à $\int_t^{t+\theta} C_p \, dt$, $C_p$ désignant la capacité calorifique du liquide à la pression $p$. Si on suppose ensuite que l'enveloppe se détende jusqu'au volume occupé par

la vapeur à la pression $p$ et à la température $t + \theta$, il faudra dépenser une quantité de chaleur latente que nous représenterons par L.

Dans les deux cas, la quantité de chaleur dépensée est la même ; on a donc

$$L = L' - \int_t^{t+\theta} (C_p - C'_p)\, dt.$$

Or, au moins dans le voisinage du point d'ébullition, la capacité calorifique d'un liquide est plus grande que celle de sa vapeur. Ainsi, pour l'eau, $C_p = 1$, $C'_p = 0{,}480$. Quand un liquide entre en ébullition sous une pression déterminée, la chaleur latente maximum est donc celle qui correspond à l'ébullition normale. En effet, par l'équation précédente, on voit que $L < L'$.

107. Transformation d'un mélange de liquide et de vapeur saturée. — Considérons un mélange de liquide et de vapeur saturée pesant 1 kilog. et contenant un poids $x$ de vapeur saturée, à la température $t$ du mélange. Faisons subir à ce mélange une transformation telle que la température augmente de $dt$ et que le poids de vapeur saturée augmente de $dx$. Comme la tension maximum $p$ est fonction de la température, elle subit une variation $dp$. La chaleur nécessaire pour cette transformation est employée à échauffer le poids $1 - x$ de liquide, à échauffer le poids $x$ de vapeur, la pression variant, et à vaporiser un poids $dx$ de liquide. On a donc

$$dQ = (1 - x)(C_p\, dt + h\, dp) + x(C'_p\, dt + h'\, dp) + L\, dx.$$

La tension maximum $p$ étant une fonction de la température seule (n° 27), on peut remplacer $dp$ par $\frac{dp}{dt}\, dt$, et écrire

$$dQ = (1 - x)\left(C_p + h\frac{dp}{dt}\right) dt + x\left(C'_p + h'\frac{dp}{dt}\right) dt + L\, dx.$$

Posons

$$m = C_p + h\frac{dp}{dt},$$

$$m' = C'_p + h'\frac{dp}{dt}.$$

Les quantités $C_p$, $C'_p$, $h$, $h'$, $m$, $m'$ sont des fonctions de la température seule, puisqu'elles se rapportent à l'état de saturation qui correspond à la température $t$, et qu'on augmente la pression de manière que la vapeur reste saturée et sans condensation partielle. On a

$$(\alpha) \qquad dQ = [m + (m' - m)x]\, dt + L\, dx.$$

Soient $v$ le volume spécifique du mélange, $u$ et $u'$ les volumes spécifiques du liquide et de la vapeur saturée. On a

$$v = u(1-x) + u'x = u + (u'-u)x.$$

On en déduit, en prenant $t$ et $x$ pour variables indépendantes,

$$dv = \frac{du}{dt}\,dt + x\frac{d(u'-u)}{dt}\,dt + (u'-u)\,dx.$$

Le travail élémentaire extérieur est $dS = p\,dv$, ou

$$dS = p\left[\left(\frac{du}{dt} + x\,\frac{d(u'-u)}{dt}\right)dt + (u'-u)\,dx\right].$$

Dans l'équation fournie par le premier principe,

$$dQ = A(dU + p\,dv),$$

remplaçons $dQ$ et $p\,dv$ par leur valeur, on a

$$(\beta)\quad A\,dU = \left[m + (m'-m)x - Ap\frac{du}{dt} - Apx\,\frac{d(u'-u)}{dt}\right]dt. + [L - Ap(u'-u)]\,dx.$$

Telle est la variation de l'énergie intérieure du mélange. L'énergie intérieure est une fonction des variables $t$ et $x$.

108. Équation de Clausius. — $dU = \frac{dU}{dt}\,dt + \frac{dU}{dv}\,dv$, et

$$A\frac{dU}{dt} = m + (m'-m)x - Ap\frac{du}{dt} - Apx\,\frac{d(u'-u)}{dt},$$

$$A\frac{dU}{dx} = L - Ap(u'-u).$$

Or, U étant une fonction de $t$ et de $x$,

$$\frac{d^2U}{dt\,dx} = \frac{d^2U}{dx\,dt}.$$

Si on cherche ces dérivées partielles en remarquant que $m$, $m'$, $p$, $u$, $u'$ sont des fonctions de $t$ seul, on a

$$(\gamma)\qquad \frac{dL}{dt} + m - m' = A(u'-u)\frac{dp}{dt}.$$

109. Equation de W. Thomson. L'équation $(\alpha)$ donne

$$\frac{dQ}{T} = \frac{m + (m'-m)x}{T}\,dT + \frac{L}{T}dx.$$

Or $\frac{dQ}{T} = d\mu$ est une différentielle exacte des deux variables indé-

pendantes T et $x$; il en résulte la relation

$$\frac{d\left(\frac{L}{T}\right)}{dT} = \frac{m' - m}{T},$$

ou bien

$$(\delta) \qquad \frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + m' - m.$$

De l'équation ($\gamma$) et de la précédente, on tire

$$(\varepsilon) \qquad \frac{L}{T} = A(u' - u)\frac{dp}{dT}.$$

110. De la première équation du numéro précédent et de l'équation ($\delta$), on déduit

$$\frac{dQ}{T} = d\mu = \frac{m}{T}dT + d\left(\frac{Lx}{T}\right),$$

$m$ étant une fonction de la température seule, le second nombre est une différence exacte; en intégrant, on aura

$$(\eta) \qquad \mu = \frac{Lx}{T} + \int \frac{m}{T} dT.$$

**Vapeurs saturées et sèches.**

111. VOLUME SPÉCIFIQUE DES VAPEURS SATURÉES. — La chaleur latente L et la tension maximum de la vapeur $p$ sont des fonctions de la température seule qui, pour quelques liquides, ont été déterminées empiriquement par M. Regnault. L'équation ($\varepsilon$) permet donc de déterminer $u' - u$ pour toutes les températures. Le volume spécifique $u$ variant peu, on le considérera comme constant, et l'on aura approximativement pour le volume spécifique de la vapeur saturée

$$u' = \frac{EL}{T\frac{dp}{dT}} + u.$$

VOLUME SPÉCIFIQUE DE 1 GR. DE VAPEUR D'EAU SATURÉE ET SÈCHE

| Aux températures | $u'$ calcul de M. Clausius, par la formule précédente | $u'$ observé par MM. Fairbairn et Taite | $u'$ calculé d'après la loi de Mariotte et celle de Gay-Lussac |
|---|---|---|---|
| | litres | litres | litres |
| 58°,21 | 8,23 | 8,27 | 8,38 |
| 92°,66 | 2,11 | 2,15 | 2,18 |
| 117°,17 | 0,947 | 0,941 | 0,991 |
| 144°,74 | 0,437 | 0,432 | 0,466 |

On voit que $u'$ décroît quand la température augmente.

$p$ et $u'$ étant des fonctions de la température seule, on peut les considérer comme étant fonctions l'un de l'autre. M. Zeuner donne entre ces deux grandeurs la relation

$$pu'^{n}=b,$$

où, pour la vapeur d'eau, $n=1{,}0646$ et $b=1{,}704$.

Si l'on construit géométriquement l'équation $pu'^{n}=b$, on obtient une sorte de courbe hyperpolique qui partage le plan en deux parties telles que pour les points compris entre la courbe et les axes, il y a condensation partielle de vapeur, et que les points de l'autre partie correspondent à un état de vapeur surchauffée. Prenons, en effet, un point sur cette courbe; il répond à un état de vapeur saturée et sèche à une pression $p$. Si on chauffe cette vapeur sans changer la pression, elle se dilate et tend vers l'état de gaz parfait. Cette transformation peut se représenter par une ligne parallèle à l'axe des volumes et qui conduit aux points de la seconde région. Si, au contraire, on diminue la température sans changer la pression, il y aura condensation partielle, et l'on sera conduit vers des points de la première région.

112. CHALEUR SPÉCIFIQUE DES VAPEURS SATURÉES. — En supposant $h$ très-petit pour les liquides, puisque leur compressibilité est très-faible, on peut poser $m=C_p$. Il en résulte que la connaissance de la chaleur latente suffit pour calculer $m'$ chaleur spécifique de la vapeur saturée. En effet, d'après l'équation (δ), on a

$$m'=T\frac{d\left(\frac{L}{T}\right)}{dT}+C_p.$$

On peut donner une autre expression de $m'$. Nous avons posé (n° 107)

$$m = C'_p + h' \frac{dp}{dt};$$

mais, en vertu de l'équation (14), on a pour les vapeurs saturées

$$h' \frac{dp}{dt} = l' \frac{du'}{dt},$$

car $u'$ et $p$ sont des fonctions de la température seule, et, par suite,

$$\frac{du'}{dt} : \frac{dp}{dt} = \frac{du'}{d\Gamma}.$$

On a donc

$$m' = C'_p + l' \frac{du'}{d\Gamma}.$$

D'après ce qui a été dit au n° 111, on voit que $\frac{du'}{d\Gamma}$ est négative pour l'eau; le second membre se présente donc comme pouvant être, suivant les cas, positif ou négatif. Voici, d'ailleurs, un tableau de résultats calculés par M. Clausius :

| | $t$ | $m'$ |
|---|---|---|
| Vapeur d'eau | 58°,21 | — 1,398 |
| | 92°,66 | — 1,266 |
| | 116°,17 | — 1,107 |
| | 144°,74 | — 0,807 |
| Sulfure de carbone | 0 | — 0,184 |
| | 80 | — 0,164 |
| | 160 | — 0,157 |
| Vapeur d'éther | 0 | + 0,116 |
| | 40 | + 0,120 |
| | 80 | + 0,128 |
| | 120 | + 0,133 |

Pour la vapeur d'eau et la vapeur de sulfure de carbone, la chaleur spécifique de la vapeur saturée est négative; pour la vapeur d'éther, elle est positive. Dans ces exemples, elle va en croissant avec la température. Il est permis de penser que tous les liquides se comportent de la même manière; que la chaleur spécifique, négative au-des-

sous d'une certaine température, devient ensuite positive et croit indéfiniment.

113. Condensation de la vapeur d'eau pendant la détente. — La valeur de $dQ$ pour les vapeurs saturées et sèches s'obtient en faisant $x=o, dx=o$ dans l'équation du n° 107

$$dQ=m'dt=m'\frac{dt}{du'}du'=\frac{m'}{\frac{du'}{dt}}du'.$$

$\frac{du'}{dt}$ et $m'$ sont négatifs pour la vapeur d'eau; donc, $dQ$ et $du'$ ont le même signe pour ce corps.

Si l'on comprime de la vapeur d'eau, $du'$ est négatif. Par suite $dQ$ est négatif, c'est-à-dire que la vapeur dégage de la chaleur; mais si l'on suppose que la compression est assez rapide pour que cette quantité de chaleur n'ait pas le temps de se répandre sur les corps extérieurs, elle échauffe la vapeur elle-même et la porte, par conséquent, au-dessus de son point de saturation. *La vapeur d'eau est donc surchauffée par une compression brusque.*

Si, au contraire, on dilate la vapeur saturée, $dQ$ est positif, ce qui indique une absorption de chaleur. Si donc on veut maintenir la vapeur saturée et sèche, elle devra prendre une certaine quantité de chaleur aux corps extérieurs pendant sa détente. Quand les conditions du phénomène sont telles que les corps extérieurs ne fournissent pas cette quantité de chaleur, le volume sera bien $u'+du'$, par le fait de la détente; mais la quantité de chaleur contenue dans la vapeur sera trop faible de la quantité $dQ$ qui la maintiendrait saturée et sèche au volume $u'+du'$. Il y aura condensation partielle. *La vapeur d'eau se condense partiellement pendant la détente.*

Ces phénomènes ont été démontrés, à peu près à la même époque, au moyen du calcul, par M. Clausius et par M. Rankine. M. Hirn en a fait la démonstration expérimentale. Dans un cylindre garni de plaques de verres il introduit de la vapeur d'eau saturée et sèche; en ouvrant un robinet la vapeur sort dans l'atmosphère, se détend dans le cylindre, et l'on voit se former dans le cylindre un nuage opaque de gouttelettes liquides provenant de la condensation partielle.

Si l'on remplace la vapeur d'eau par de la vapeur d'éther, on produira la condensation partielle en comprimant la vapeur d'éther à l'aide d'un piston. C'est ce qu'indiquent les valeurs négatives de $m'$ pour l'éther.

**Mélange de vapeur et de liquide.**

114. ÉNERGIE INTÉRIEURE D'UN MÉLANGE DE VAPEUR ET DE LIQUIDE. — Supposons un liquide enfermé dans un cylindre dont le piston se déplace précisément d'une quantité égale à la dilatation du liquide, c'est-à-dire de telle sorte que la pression soit toujours la tension maximum pour la température du liquide. Soit, pour un kilogramme du liquide, $U_0$ l'énergie intérieure correspondante à la tension initiale $p_0$; soit U l'énergie intérieure à la température T et à la tension maximum correspondante, quand on a laissé se produire une fraction $x$ de vapeur. Pour calculer $U - U_0$ on peut se servir de la formule (β) en y faisant $x = 0$ et en intégrant entre les limites qui donnent $U_0$ et U, on a

$$A(U - U_0) = \int_{T_0}^{T} m\,dt - A\int_{p_0}^{p} p\,du + Lx - Ap(u' - u)x.$$

Cherchons d'ailleurs directement cette formule. Faisons passer le liquide de l'état $(T_0, p_0)$ à l'état $(T_1, p_1)$. Ces deux états ont été définis précédemment. La chaleur nécessaire à cette transformation est

$$\int_{T_0}^{T} m\,dt.$$

Cette quantité de chaleur, d'après l'équation fondamentale, est égale à

$$A\left[\int_{T_0}^{T} dU + \int_{p_0}^{p} p\,dv\right];$$

on a donc

$$\int_{T_0}^{T} dU = E\int_{T_0}^{T} m\,dt - \int_{p_0}^{p} p\,du.$$

Si l'on volatilise un poids $x$ de liquide, en ne faisant pas varier la température, et par conséquent la tension maximum restant la même (pour cela il suffit d'augmenter convenablement le volume par le déplacement du piston), la quantité de chaleur nécessaire à cette transformation est $Lx$. Si l'on emploie la première équation fondamentale en appelant $\Delta' U$ la variation d'énergie pour cette transformation, $u'$ le volume spécifique de la vapeur, $u$ celui du liquide à l'état (T, $p$), on aura

$$ELx = \Delta' U + p(u' - u)x.$$

Si l'on représente par $U - U_0$ la variation totale de l'énergie, savoir

$\int_{T_0}^{T} dU + \Delta' U$, on aura

$$U - U_0 = E\left(Lx + \int_{T_0}^{T} m\,dt\right) - p(u' - u)x - \int_{p_0}^{p} p\,du.$$

En intégrant par parties, on a

$$\int_{p_0}^{p} p\,du = pu - p_0u_0 - \int_{p_0}^{p} u\,dp;$$

de plus, le volume spécifique du mélange est $v = u + (u' - u)x$. On peut donc écrire

$$(\theta) \qquad U - U_0 = E\left[Lx + \int_{T_0}^{T} m\,dt\right] - pv + p_0u_0 + \int_{p_0}^{p} u\,dp.$$

Si on désigne maintenant par les indices 1 et 2 deux états du mélange, la variation d'énergie est

$$(\lambda) \qquad U_2 - U_1 = E\left[L_2x_2 - L_1x_1\right] - p_2v_2 + p_1v_1 + E\int_{T_1}^{T_2} m\,dt + \int_{p_1}^{p_2} u\,dp.$$

Pour les liquides, le coefficient $m$ varie peu, et on peut le prendre égal à $C_p$, parce que la compressibilité est très-faible. Le volume spécifique $u$ du liquide varie peu aussi. On peut donc poser, avec une approximation suffisante,

$$(\theta') \qquad U - U_0 = ELx + EC_p(T - T_0) - p(v - u),$$

et

$$(\lambda') \qquad U_2 - U_1 = E[L_2x_2 - L_1x_1] + EC_p(T_2 - T_1) - p_2v_2 + p_1v_1 + (p_2 - p_1)u.$$

115. Transformation d'un mélange de liquide et de vapeur suivant une ligne adiabatique. — L'équation des lignes adiabatiques est $d\mu = 0$, on a donc (n° 110)

$$-\frac{m}{T}\,dT = d\left(\frac{Lx}{T}\right);$$

et si 1 et 2 sont les indices de deux états du mélange, on a pour l'équation d'une ligne adiabatique

$$(\mu) \qquad \frac{L_2x_2}{T_2} - \frac{L_1x_1}{T_1} = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T}\,dT.$$

Étant donnés $x_1$, $T_1$ pour le premier état du mélange, on en déduira

la quantité de vapeur saturée $x_2$, $T_2$. Quant au volume du mélange, on le déduira de la formule $v = u + (u' - u)x$, dans laquelle $u'$ est une fonction de T.

Il n'y a aucune communication de chaleur dans cette transformation, puisqu'elle a lieu suivant une ligne adiabatique ; le travail extérieur, dû à la détente de la vapeur suivant une courbe adiabatique, est donc équivalent à la perte d'énergie intérieure. On a donc, d'après l'équation (0) et en représentant par S ce travail extérieur,

$$(\nu) \qquad S = U_1 - U_2 = E(L_1 x_1 - L_2 x_2) + p_2 v_2 - p_1 v_1 - E\int_{T_1}^{T_2} m dT - \int_{p_1}^{p_2} u dp.$$

# CHAPITRE III

## MACHINES A VAPEUR

116. Emploi de la vapeur comme moteur. — Denis Papin est l'inventeur des machines dans lesquelles la vapeur fait mouvoir un piston dans un corps de pompe.

Les essais et les applications dus à Papin étaient tombés dans l'oubli, lorsqu'en 1698 Savery construisit une machine à vapeur pour élever l'eau. On remplissait de vapeur un réservoir communiquant par le bas à un tuyau d'aspiration plongé dans l'eau. En projetant de l'eau froide sur ce réservoir, on condensait la vapeur et on faisait ainsi le vide; la soupape d'aspiration s'ouvrait et l'eau emplissait le réservoir. En exerçant ensuite, à l'aide de la vapeur, une pression sur cette eau, elle était refoulée dans un tuyau d'ascension. La puissance de cette machine était très-faible; son emploi ne put s'étendre jusqu'à l'épuisement de l'eau dans les mines.

Newcomen, artisan de Darmouth, eut l'idée de mettre des pompes de mines en mouvement au moyen du piston de Papin, qui était relié aux tiges des pompes par un balancier. Sous le piston de Papin on faisait arriver de la vapeur pour le soulever, puis on projetait de l'eau dans le cylindre au milieu de cette vapeur; le vide se produisait et le piston descendait sous l'influence de la pression atmosphérique qui s'exerçait sur la face supérieure du piston, laissée libre. Cette machine s'appelait pour cette raison *machine atmosphérique*. Par le jeu du balancier, les pompes élevaient l'eau quand le piston descendait; c'est donc par la pression atmosphérique que se produisait le travail des pompes.

117. En 1763, l'Écossais James Watt, attaché au cabinet de physique de l'université de Glascow, remarqua, en réparant un petit modèle de la machine de Newcomen, que l'injection de l'eau au milieu de la vapeur refroidissait les parois du cylindre et causait par suite

une condensation de la vapeur à son entrée dans le cylindre. Pour éviter cette perte de vapeur, il eut enfin l'idée d'opérer la condensation en dehors du cylindre, dans un vase à part, appelé *condenseur*, que l'on mettait en communication avec le corps de pompe quand on voulait faire le vide dans celui-ci.

La machine présentait encore un inconvénient grave : la face du piston recevait la pression atmosphérique et, pour éviter la communication de l'intérieur avec l'air atmosphérique, on versait de l'eau sur la face supérieure du piston. On obtenait ainsi un joint hydraulique entre le piston et les parois du cylindre ; mais cette eau coulait en partie au-dessous du piston, refroidissant d'une part les parois du cylindre, et de l'autre donnant des vapeurs qui empêchaient de produire le vide. Watt apporta un perfectionnement considérable, en fermant la partie supérieure du cylindre. La tige du piston traversait à frottement une *boîte à étoupe*. La pression atmosphérique fut remplacée par la pression de la vapeur, que l'on introduisait au moment convenable à la partie supérieure du cylindre, pour faire descendre le piston. Le refroidissement du corps de pompe fut annulé par une circulation de vapeur entre sa surface et une enveloppe extérieure ou *chemise*.

Après ces perfectionnements, la machine à vapeur put sortir des mines, où le charbon n'est pas cher, et passer dans les usines. La machine à vapeur était à *simple effet*, c'est-à-dire que la vapeur n'exerçait de travail utile que par un seul côté du piston.

Les deux mouvements en sens contraires du piston se font avec des vitesses inégales dans la machine à simple effet. C'est un grave inconvénient dans la plupart des industries, aussi Watt fit arriver alternativement la vapeur des deux côtés du piston, et constitua ainsi la machine à *double effet*.

Watt enrichit son invention par d'autres purement cinématiques qui assuraient un bon fonctionnement des pièces de la machine. Le balancier des anciennes machines à simple effet ne pouvait être utilisé dans les machines à double effet ; le *parallélogramme de Watt* permit un assemblage rigide de la tige du piston avec le balancier. Par le jeu du *tiroir*, les deux parties du cylindre, séparées par le piston, furent respectivement mises en communication en temps voulu, soit avec le générateur de vapeur, soit avec le condenseur. Le tiroir à *coquille* fut inventé en 1801 par Murray, de Leeds. Enfin, l'*excentrique* calé sur l'arbre principal de la machine assure le mouvement automatique du tiroir.

118. Si la vapeur entre à pleine pression pendant toute la course du piston, la vitesse de celui-ci, en général, s'accélère jusqu'à la fin

de la course. Il peut en résulter des chocs qui, tout au moins, nuisent à la stabilité de la machine. Pour éviter cet inconvénient, Watt imagina la *détente*; il ne faisait entrer de la vapeur que pendant un tiers de la course du piston; pendant les deux autres tiers, la vapeur agissait par sa détente. En outre de la régularité du mouvement, on obtient une grande économie. Il est facile de s'en rendre compte approximativement. Dans une détente au $\frac{1}{n}$, on n'introduit de vapeur (à pleine pression) que pendant le $\frac{1}{n}$ de la course. On obtient ainsi $\frac{1}{n}$ du travail qu'on aurait obtenu en laissant la vapeur pénétrer dans le cylindre à pleine pression pendant toute la course. Pendant le reste de la course du piston, la vapeur agit par sa détente et produit un travail qui n'exige aucune dépense nouvelle de vapeur. Pour un même travail que doit fournir la vapeur en un même temps, il faudra un cylindre plus grand ou un plus grand nombre de coups de piston, mais l'économie de vapeur est considérable.

Soient $l$ la longueur du cylindre, $\Omega$ sa surface, $\frac{1}{n}$ la détente, $p_2$ la pression dans la chaudière, $p_1$ la contre-pression. Le volume de vapeur introduit est $\frac{l\Omega}{n}$. Le travail dû à l'introduction de ce volume de vapeur à pleine pression est $\frac{l\Omega}{n} p_2$. Pour calculer le travail dû à la détente, supposons, par approximation, que la vapeur se détende comme un gaz suivant la loi de Mariotte, nous aurons

$$2{,}302\ 6\ \frac{l\Omega}{n} p_2 \log n;$$

le logarithme de cette formule est pris dans le système décimal. Le travail de la contre-pression est $-\Omega l p_1$. En réunissant ces trois travaux on trouve

$$\frac{l\Omega}{n} p_2 \left(1 + 2{,}302\ 6 \log n - \frac{p_1}{p_2} n\right).$$

Cette formule n'est pas conforme à celle qui résulte de la théorie mécanique de la chaleur et que nous donnerons plus loin. Pendant la détente, il se condense de la vapeur, nous l'avons vu au n° 113, et cette formule ne tient pas compte de ce phénomène.

119. Dans l'établissement de la formule précédente et des formules

de ce chapitre, nous ne tiendrons pas compte de certains détails de construction que nous allons résumer brièvement.

L'*avance à l'échappement* consiste à mettre la partie du cylindre où s'effectue la détente en communication avec le condenseur avant que le piston ait terminé sa course. Il en résulte que ce n'est pas le piston qui pousse la vapeur vers le réfrigérant dans le mouvement contraire au précédent. Si on perd un peu du travail de la détente, on diminue considérablement le travail de la contre-pression. Les machines à grande vitesse ont une plus grande avance à l'échappement, surtout celles où la vapeur à la sortie du cylindre doit déterminer le tirage dans le foyer (locomotives).

L'*avance à l'admission* consiste à mettre en communication avec la chaudière la même partie du cylindre dont nous parlons avant que le piston ait terminé son mouvement rétrograde. On remédie ainsi à *l'étirage* de la vapeur à travers les lumières ou orifices par lesquels elle pénètre dans le cylindre. Elle est, en effet, comprimée pendant cette dernière partie du mouvement rétrograde, et reprend sa tension maximum au moment où le piston va recommencer sa course directe.

On obtient ces avances en réglant le calage de l'excentrique. Sans tenir compte de ces avances, l'excentrique serait calé à 90 degrés par par rapport à la manivelle mue par le piston, afin que l'ouverture des lumières de la distribution s'effectue très-rapidement pendant que le piston est à la fin de sa course. En augmentant un peu cet angle, on fait en sorte que l'ouverture d'admission d'un côté du piston et d'échappement de l'autre soient un peu ouverts avant la fin de la course.

Dans les machines sans détente, les *bandes* des coquilles ont exactement les dimensions des lumières. La détente fixe peut être obtenue par un prolongement des bandes à l'extérieur de la coquille ; ce prolongement s'appelle *recouvrement extérieur*. Le recouvrement extérieur a pour effet de donner lieu à une trop grande avance à l'échappement ; on remédie à cet inconvénient par un prolongement des bandes à l'intérieur de la coquille : ce prolongement s'appelle *recouvrement intérieur*.

120. Travail d'un poids P de vapeur introduit par coup de piston dans le cylindre d'une machine a condensation et dont la détente serait complète. — Par détente complète nous entendons que la pression $p_1$ du mélange, quand il sort du cylindre, à la fin de la course du piston, est la tension maximum qui répond à la température $t_1$ du réfrigérant. Soit P le poids du mélange de vapeur et d'eau, entraînée mécaniquement à la sortie de la chaudière, qu'on introduit dans le cylindre par coup de piston. Soient $t_2$ la température de ce mélange et $p_2$, $v_2$, $x_2$ les valeurs de $p$, $v$, $x$ correspondantes à $t_2$.

1° L'introduction de la vapeur se fait à pleine pression d'un côté du piston pendant une partie de la course, et l'autre côté du piston est en communication avec le condenseur où la pression est $p_1$. Le volume de l'unité de poids du mélange de vapeur et d'eau étant $v_2$, le volume du poids P est $Pv_2$. Le travail de la pression $p_2$ et de la *contre-pression* $p_1$ est donc

$$Pv_2\,(p_2 - p_1).$$

2° Quand le poids P de vapeur est introduit dans le cylindre, la communication avec la chaudière est interrompue, et pendant le reste de la course du piston le mélange de vapeur et d'eau se détend suivant une ligne adiabatique, en supposant les parois du cylindre dépourvues de conductibilité. Soient $p_1$, $v_1$, $x_1$ les valeurs correspondantes de $p$, $v$, $x$ quand, à la fin de la détente complète, on met la partie du cylindre où est le mélange en communication avec le condenseur, dont la température est $t_1$.

L'autre côté du piston n'a pas cessé d'être en communication avec le réfrigérant, et la contre-pression $p_1$ a donné un travail négatif $-Pp_1\,(v_1 - v_2)$, qu'il faut ajouter au travail de la détente donné, pour l'unité de poids de mélange, par la formule $(\nu)$. On a donc, pour cette seconde période

$$P\left[E(L_2x_2 - L_1x_1) + p_1v_1 - p_2v_2 + E\int_{T_1}^{T_2} m\,dT + \int_{p_1}^{p_2} u\,dp - p_1(v_1 - v_2)\right].$$

3° Il est nécessaire de ramener à la chaudière un poids P d'eau, afin de revenir au point de départ du cycle. Cette opération donne lieu à un travail négatif employé à faire mouvoir la *pompe alimentaire*. Pour soulever le poids P d'eau pris au condenseur, où la pression est $p_1$, et le refouler dans la chaudière, où la pression est $p_2$, il faut un travail égal à

$$-P(p_2 - p_1)u,$$

$u$ désignant le volume spécifique de l'eau.

Faisons la somme de ces travaux et remarquons que

$$\int_{p_1}^{p_2} u\,dp = u(p_2 - p_1),$$

puisque $u$ varie très-peu; que l'équation $(\mu)$ fournit la valeur de $x_1$ quand on connaît $x_2$. (On pourrait calculer $u'_1$, volume spécifique de

la vapeur à $t_1$, d'après la formule du n° 111, et en conclure $v_1$ par la formule $v_1 = u + (u'_1 - u)x_1$).

Si l'on représente par S le travail disponible à chaque coup de piston, on a

$$S = PE\left[L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT\right].$$

La quantité de chaleur fournie par le foyer à la chaudière est celle qui est nécessaire à l'élévation de température du poids P d'eau depuis $T_1$ jusqu'à $T_2$ degrés, augmentée de la quantité de chaleur nécessaire pour vaporiser un poids $x_2$ de vapeur, par unité de poids du mélange de vapeur et d'eau entraînée mécaniquement. Le travail correspondant s'obtiendra en multipliant cette dépense par le nombre E. Enfin, le rendement de la machine égale le rapport du travail disponible au travail équivalent à la quantité de chaleur fournie par la chaudière, savoir :

$$\frac{L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT}{L_2 x_2 + \int_{T_1}^{T_2} m\, dT}.$$

Le rendement maximum d'une machine fonctionnant entre les températures $T_1$ et $T_2$, qui est fourni par le cycle de Carnot ou par un cycle équivalent, est égal à $\frac{T_2 - T_1}{T_2}$. La différence entre ce coefficient et le précédent, tout calcul fait, est égal à

$$\frac{\int_{T_1}^{T^2} m\left(\frac{T_2}{T_1} - \frac{T_1}{T}\right) dT}{L_2 x_2 + \int_{T_1}^{T_2} m\, dT}.$$

Cette quantité est positive; il en résulte que le coefficient économique d'une machine à vapeur est plus petit que si elle fonctionnait suivant un cycle de Carnot.

On voit qu'il y a avantage à employer de la vapeur sèche, car en faisant croître $x_2$, le rendement augmente.

La quantité $m$ varie très-peu; supposons qu'elle est constamment égale à la chaleur spécifique $C_p$ du liquide, nous aurons une formule très-suffisante pour les applications

$$S = PE\left[L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + C_p (T_2 - T_1) - 2{,}3026\, C_p\, T_1 \log \frac{T_2}{T_1}\right],$$

dans laquelle on emploie les logarithmes vulgaires.

121. **Détente incomplète.** — Les applications ne permettent pas encore une détente complète. Une des plus grandes détentes est au 1/15. Si l'on prenait pour température du condenseur $t_1 = 50°$ et pour température de la chaudière $t_2 = 150°$, il faudrait une détente au 1/26 pour qu'elle fût complète, car c'est le rapport entre le volume de la vapeur saturée à 150° et le volume du mélange de vapeur et d'eau à la fin de la détente à 50°.

Supposons que l'on arrête la détente quand la température est T'. Soient $p', v', x'$, les valeurs de $p, v, x$ correspondantes à T'. Les quantités T' et $p'$ sont supérieures aux quantités $T_1$ et $p_1$ du condenseur, et on ne recueille pas tout le travail de la détente complète. Le travail recueilli est celui de la détente incomplète jusqu'à la température T', diminué du travail de la contre-pression, c'est-à-dire

$$P\left[E(L_2x_2 - L'x') + p'v' - p_2v_2 + E\int_{T'}^{T_2} m\,dT + \int_{p'}^{p_2} u\,dp - p_1(v' - v_2)\right].$$

On a d'après l'équation (μ)

$$\frac{L'x'}{T'} = \frac{L_2x_2}{T_2} + \int_{T'}^{T_2} \frac{m}{T}\,dT.$$

Ajoutons le travail à pleine pression $Pv_2(p_2 - p_1)$ et le travail de la pompe alimentaire $Pu(p_2 - p_1)$, on aura pour le travail disponible

$$S = P\left[EL_2x_2\frac{T_2 - T'}{T_2} + (p' - p_1)(v' - u) + E\int_{T'}^{T_2} m\left(1 - \frac{T'}{T}\right)dT\right].$$

Substituons à $m$ la valeur approchée $C_p$,

$$S = P\left[EL_2x_2\frac{T_2 - T'}{T_2} + (p' - p_1)(v' - u) + C_p(T_2 - T') - 2{,}3026\,C_pT'\log\frac{T_2}{T'}\right].$$

122. **Chemise a vapeur de Watt.** — Les transformations précédentes sont supposées avoir lieu suivant des lignes adiabatiques, et, par conséquent, il y a condensation partielle de la vapeur pendant la détente. Watt fit circuler autour du cylindre les gaz qui se rendent du foyer à la cheminée, de telle sorte que le rendement augmente sans qu'il soit nécessaire d'augmenter la dépense de combustible, et, de plus, on évite la formation de l'eau de condensation qui gêne la marche du piston.

Calculons le travail disponible, en supposant que les gaz du foyer maintiennent constamment la vapeur à l'état de vapeur saturée et

# CHAPITRE IV

## FUSION ET SOLIDIFICATION

124. **Température de fusion. Chaleur latente de fusion.** — La température de l'état solide sous une pression $p$, ou la température de fusion sous la pression $p$, est fonction de la pression.

La chaleur latente de la solidification retardée est plus faible, en général, que la chaleur latente de la solidification normale. La démonstration est analogue à celle du n° 106 et est basée sur ce que la chaleur spécifique d'un liquide est plus grande que la chaleur spécifique du même corps à l'état liquide.

125. **Transformation d'un mélange de liquide et de solide.** — Soient $v$ le volume de 1 kilogramme du mélange à la température $t$, et respectivement $u$ et $u'$ les volumes spécifiques du liquide et du solide au point de liquéfaction. Supposons que le mélange contienne un poids $x$ du solide.

Prenons pour variables indépendantes $t$ et $x$ et supposons que le mélange passe de l'état $(t, x)$ à l'état $(t+dt, x+dx)$. Donnons un accent aux quantités qui se rapportent à l'état solide; on trouvera, en raisonnant comme au n° 107, que la quantité de chaleur nécessaire à la transformation est

$$dQ = (1-x)\left(C_p + h\frac{dp}{dt}\right)dt + x\left(C'_p + h'\frac{dp}{dt}\right)dt - L\,dx.$$

Posons

$$m = C_p + h\frac{dp}{dt},$$

$$m' = C'_p + h'\frac{dp}{dt};$$

on a

$$dQ = [m + (m'-m)x]\,dt - L\,dx.$$

Comme au n° 107, on déduirait encore la variation de l'énergie intérieure

$$A\,dU = \left[m + (m' - m)x - Ap\frac{du}{dt} - Apx\frac{d(u' - u)}{dt}\right]dt + [L - Ap(u' - u)]\,dx.$$

126. L'équation de M. Clausius, déduite comme au n° 108, est

$$-\frac{dL}{dt} + m - m' = A(u' - u)\frac{dp}{dt}.$$

L'équation de M. W. Thomson est

$$\frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + m - m'.$$

De ces deux équations on déduit :

$$(1) \qquad \frac{L}{T} = A(u - u')\frac{dp}{dT}.$$

127. Température de fusion de la glace. Regel. — La chaleur latente L étant toujours positive, $u - u'$ et $\frac{dp}{dT}$ sont toujours de même signe.

En général, les corps se dilatent pendant la liquéfaction. La différence $u - u'$ et, par conséquent, la dérivée $\frac{dp}{dT}$ sont positives. Cela signifie que pour les corps en question la température de la fusion normale croît avec la pression. Pour le blanc de baleine, la paraffine, voir au n° 12 les chiffres qui résultent des expériences de M. Bunsen sur ces deux corps.

D'autres corps éprouvent une dilatation pendant la solidification. $u - u'$ et $\frac{dp}{dT}$ sont négatifs dans ce cas; donc la température de la fusion normale s'abaisse quand la pression augmente. L'eau offre un exemple de ce phénomène. Dans l'équation (1) faisons $T = 273$, $L = 79{,}25$, $u = 0{,}001$, $u' = \frac{1}{923}$. Nous aurons

$$\frac{dT}{dp} = -0{,}007,$$

qui est la valeur de la dérivée $\frac{dT}{dp}$ pour la pression 760 millimètres et la

Il y a donc un rapport fini entre l'accroissement d'une fonction et les accroissements correspondants des variables, quelque petits que soient ces accroissements.

On appelle dérivée la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement d'une variable arbitraire dont elle dépend, quand ce dernier accroissement tend vers zéro.

129. Infiniment petits. — Les infiniment petits sont des quantités employées subsidiairement dans la solution d'une question, qui tendent vers zéro devant les quantités finies proposées, de telle sorte que la solution est indépendante de ces quantités.

Deux infiniment petits sont du même ordre quand leur rapport est fini. Ainsi, en vertu de la continuité, l'accroissement d'une fonction est, en général, un infiniment petit du même ordre que l'accroissement de la variable indépendante considérée.

Quelle que soit la forme géométrique ou analytique que l'on donne aux infiniment petits, on doit toujours les considérer comme dépendant les uns des autres, comme on le fait pour les fonctions et les variables dont elles dépendent. Pour cela, si c'était nécessaire, on pourrait les considérer respectivement comme des fonctions d'une même variable indépendante. Ainsi, supposons qu'un point se déplace sur une courbe pendant un temps $dt$; l'arc parcouru, en vertu de la continuité des fonctions, est du même ordre que $dt$. Les variations des coordonnées sont également du même ordre que $dt$, et par conséquent que l'arc parcouru ; et l'on aurait la variation de l'une des coordonnées en fonction de la variation de l'autre, en éliminant le temps.

Pour évaluer les aires planes, on les divise en tranches parallèles à l'un des axes, celui des $y$, par exemple, et on fait la somme de ces éléments. Le dernier peut être considéré comme la variation de l'aire quand $x$ varie de $dx$. Cet élément est du même ordre que l'accroissement $dx$.

L'angle formé par une tangente en un point variable sur une courbe avec la tangente en un point fixe, est une fonction de la distance des deux points sur la courbe. Quelle qu'elle soit, cette fonction, quand la distance des deux points est infiniment petite, cette distance est du même ordre que l'angle des deux tangentes en ces points, qu'on appelle alors l'angle de contingence.

130. Deux quantités infiniment petites peuvent être dans un rapport qui ne soit pas fini, et cependant on peut avoir besoin de considérer tantôt l'une, tantôt l'autre. On est donc amené à considérer les infiniment petits de différents ordres. Nous dirons que le rapport d'un infiniment petit $\alpha_{n+1}$, d'ordre $n+1$, à un infiniment petit $\alpha_n$, d'ordre $n$, est un infiniment petit du premier ordre. Soit $\alpha$ un infiniment petit du

premier ordre; si $k$ désigne un coefficient fini, $kx$ représente, d'une manière générale, un infiniment petit du premier ordre.

De $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = kx$, on déduit $x_{n+1} = kx.x_n$. Ce qui veut dire, en donnant à $n$ des valeurs depuis 1, qu'un infiniment petit du second ordre est égal au produit de deux infiniment petits du premier ordre, ce que l'on peut représenter par $kx^2$, $k$ ayant une valeur convenable; qu'un infiniment petit du troisième ordre est égal au produit d'un infiniment petit du second ordre par un infiniment petit du premier ordre, ce qu'on peut représenter par $kx^3$, et ainsi de suite.

131. Sur l'emploi des infiniment petits. — Avant de donner des exemples d'infiniment petits de différents ordres, donnons les trois théorèmes suivants.

Si on y regarde de près, on reconnaît que les opérations à faire sur les infiniment petits ont pour éléments soit la recherche du rapport de deux infiniment petits, soit celle d'une somme d'infiniment petits.

*Théorème I. — Lorsque deux infiniment petits ont un rapport qui tend vers l'unité, ils ne diffèrent que d'un infiniment petit d'ordre supérieur.*

Si $\lim. \frac{A}{A'} = 1$, on a $\frac{A}{A'} = 1 + \varepsilon$. $\varepsilon$ tendant vers zéro, quand on cherche la limite du rapport, est un infiniment petit; donc $\varepsilon A'$, qui est la différence entre A et A', est d'ordre supérieur à celui de A et de A' (130).

Ce théorème revient à celui-ci : *On peut toujours remplacer un infiniment petit par un autre (du même ordre) qui n'en diffère que d'un infiniment petit d'ordre supérieur.* Et en effet, quand on fera tendre vers zéro A et A', considérés précédemment, la limite de leur rapport étant l'unité, ces quantités seront égales.

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences de celui-là.

132. *Théorème II. — La limite du rapport de deux infiniment petits ne varie pas quand on les remplace par d'autres qui n'en diffèrent respectivement que d'infiniment petits d'ordre supérieur.*

Soient A et B les infiniment petits proposés, et A', B' ne différant respectivement de A et B que d'infiniment petits d'ordre supérieur. Il faut démontrer que

$$\lim. \frac{A}{B} = \lim. \frac{A'}{B'}.$$

Or, on a identiquement

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{A'} \cdot \frac{A'}{B'} \cdot \frac{B'}{B};$$

d'où

$$\lim \frac{A}{B} = \lim \frac{A}{A'} \cdot \lim \frac{A'}{B'} \cdot \lim \frac{B'}{B} = \lim \frac{A'}{B'};$$

car, d'après le théorème précédent, $\lim \frac{A}{A'} = 1$, et $\lim \frac{B}{B'} = 1$.

133. *Théorème III. — Une somme de quantités infiniment petites ne change pas quand on les remplace par d'autres qui n'en diffèrent respectivement que d'infiniment petits d'ordre supérieur.*

Soit $A_1 + A_2 + \ldots A_n$ une somme d'infiniment petits dont le nombre $n$ augmente indéfiniment quand ils tendent vers zéro, de telle sorte que la somme converge vers une limite finie. Remplaçons-les respectivement par les infiniment petits $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ tels qu'on ait

$$\frac{A'_1}{A_1} = 1 + \varepsilon_1, \quad \frac{A'_2}{A_2} = 1 + \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \frac{A'_n}{A_n} = 1 + \varepsilon_n.$$

On aura

$$A'_1 + A'_2 + \ldots A'_n = A_1 + A_2 + \ldots A_n + \varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \varepsilon_n A_n.$$

Soit $\varepsilon$ la plus grande en valeur absolue des quantités $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$; on aura

$$(A'_1 + A'_2 + \ldots A'_n) - (A_1 + A_2 + \ldots A_n) < \varepsilon (A_1 + A_2 + \ldots A_n).$$

Or, par hypothèse, quand $n$ croît indéfiniment, $A_1 + A_2 + \ldots A_n$ tend vers une limite finie, et $\varepsilon$ tend vers zéro; donc $\varepsilon(A_1 + A_2 + \ldots A_n)$ tend également vers zéro, et par suite la différence des deux sommes est nulle à la limite.

134. Les théorèmes que nous venons d'établir servent à *l'élimination* des infiniment petits quand, dans une question, ayant trouvé une relation entre des quantités finies et des quantités infiniment petites, on cherche à passer à une relation entre des quantites finies seulement ou entre des quantités infiniment petites d'un ordre déterminé. Leur usage peut être ainsi résumé d'une manière générale : quand on passe à la limite, les infiniment petits disparaissent devant les quantités d'ordre inférieur. Ainsi les infiniment petits du second ordre disparaîtront devant les infiniment petits du premier ordre ou, en d'autres termes, quand on traitera une question en se servant d'infiniment petits du premier ordre, on n'aura pas à tenir compte des infiniment petits des ordres supérieurs, et ainsi de suite. Toute la difficulté consiste à bien établir les ordres des grandeurs que l'on considère et aussi à bien établir les rapports finis des infiniment petits qui sont de même ordre.

Pour l'évaluation de l'aire d'une courbe plane, considérons des tranches élémentaires comprises entre des ordonnées consécutives. L'aire de la courbe est égale à une somme de parallélogrammes dont la surface est de la forme $y\,dx\sin\theta$ ($\theta$ étant l'angle des axes). On néglige une somme de petits triangles dont les côtés sont les variations $dy$, $dx$ des coordonnées et un petit arc de la courbe. Ces triangles sont plus petits en valeur absolue que les parallélogrammes correspondants dont la surface est de la forme $dx\,dy\sin\theta$. Or cette surface est de second ordre (130); elle disparaît devant $y\,dx\sin\theta$.

Il resterait encore à faire voir que les résultats obtenus, en faisant usage des infiniment petits, sont rigoureusement exacts. On procède, en apparence, comme pour un calcul d'approximation; les résultats n'en sont pas moins indépendants de la grandeur arbitraire attribuée d'abord aux infiniment petits et de la forme qu'on leur a donnée. Nous ne pouvons nous arrêter sur ce sujet; d'ailleurs ce que nous venons de dire sur les infiniment petits ne peut donner lieu à aucun doute à cet égard.

135. Exemples d'infiniment petits. — Lorsqu'on cherche la dérivée d'une fonction, on établit le rapport entre l'accroissement de la fonction et l'accroissement arbitraire d'une variable indépendante dont dépend le premier. Si $\Delta y$ et $\Delta x$ sont ces accroissements, le rapport se présente sous la forme $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x+\Delta x)$. D'après ce que nous avons dit aux nos 128, 129, $f(x+\Delta x)$ ne diffère de $f(x)$ que d'un infiniment petit; représentons-le par $\varepsilon$. On aura $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x) + \varepsilon$ ou $\Delta y = f(x)\,\Delta x + \varepsilon\Delta x$. On peut donc, à un infiniment petit du second ordre près, $\varepsilon\Delta x$, représenter l'accroissement de la fonction par $f(x)\,\Delta x$. L'égalité $\Delta y = f(x)\,\Delta x$ exprime que, *à partir d'une valeur déterminée de $x$, l'accroissement $\Delta y$ d'une fonction est proportionnel à celui de la variable indépendante, si l'on néglige les infiniment petits supérieurs à celui de $\Delta y$ et de $\Delta x$.*

Si l'on passe à la limite, c'est-à-dire si l'on suppose que $\Delta y$ tend avec $\Delta x$ vers zéro, et si l'on représente ces variations respectivement par $dy$, $dx$, qu'on appelle les différentielles de la fonction et de la variable, on aura rigoureusement pour expression de la dérivée

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

136. On apprend en trigonométrie à développer le sinus et le cosinus d'un arc plus petit que $\frac{\pi}{2}$, en série ordonnée suivant les puis-

sances croissantes de l'arc. Soit $\alpha$ un arc infiniment petit du premier ordre ; si, pour le sinus, on s'arrête aux infiniment petits du troisième ordre, et si, pour le cosinus, on s'arête aux infiniment petits du second ordre, on aura

$$\operatorname{Sin}\alpha = 1 - \frac{\alpha^3}{6},$$

$$\operatorname{Cos}\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

c'est-à-dire :

*La différence entre un arc infiniment petit du premier ordre et son sinus est un infiniment petit du troisième ordre.*

*La différence entre l'unité et le cosinus d'un arc infiniment petit du premier ordre est un infiniment petit du deuxième ordre.*

Ajoutons :

*Une droite finie ne diffère de sa projection que d'un infiniment petit du second ordre, quand l'angle qu'elle fait avec l'axe de projection est un infiniment petit du premier ordre.*

En effet, soient $l$ la longueur de cette droite et $l'$ celle de sa projection, on a

$$l' = l\cos\alpha = l\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

d'où

$$l - l' = \frac{l}{2}\alpha^2$$

en négligeant, bien entendu, les infiniment petits d'ordre supérieur au deuxième. Dans toute question où l'on pourra négliger les infiniment petits du deuxième ordre, on considérera la projection d'une droite comme étant égale à la droite elle-même, si l'angle de cette droite et de l'axe de projection est infiniment petit du premier ordre.

137. Le volume qui aurait pour dimensions $dx$, $dy$, $dz$ est du troisième ordre.

Nous voudrions multiplier ces exemples et puis ensuite montrer l'utilité des infiniment petits pour l'étude de la forme et de la mesure des grandeurs, quand celles-ci ne se ramènent pas directement aux notions premières ; définir la courbure, etc., la pression en un point d'une surface, la vitesse d'un mobile en un point de sa trajectoire, les accélérations, etc. ; mais nous nous écarterions trop de notre but.

**Différentielles partielles, différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.**

138. Cas d'une fonction de deux variables indépendantes. — $z = f(x, y)$ représente une surface. Soit M le point dont les coordonnées sont $x$, $y$, et M′ celui dont les coordonnés sont $x+dx$, $y+dy$.

Supposons que $y$ ne varie pas d'abord ; $z$ est alors fonction d'$x$ seul. Pour un accroissement $dx$ donné à $x$, le point M se transporte en N sur une droite MN située dans un plan parallèle à ZOX.

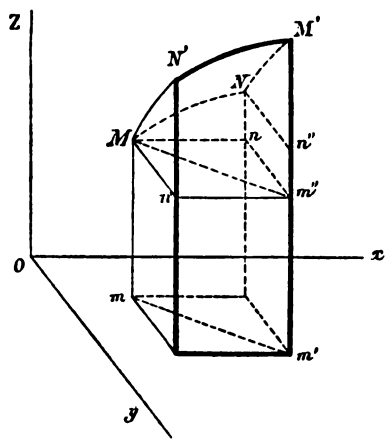


Fig. 4.

On peut dire sur une droite parce que l'accroissement de la fonction est proportionnel à celui de la variable, quand celui-ci est infiniment petit (135). Si $f'_x dx$ représente la dérivée de $f(x, y)$ par rapport à $x$ seul, l'accroissement de la fonction est $n\mathrm{N} = f'_x dx$. C'est ce qu'on appelle la *différentielle partielle de z* par rapport à $x$; on la représente encore par $\frac{dz}{dx} dx$.

Si l'on avait fait varier $y$ seul, on aurait eu la *différentielle partielle* par rapport à $y$. Elle est égale à $n'\mathrm{N}' = \frac{dz}{dy} dy = f'_y dy$.

Si l'on fait varier à la fois $x$ et $y$, $f(x+dx, y+dy) - f(x, y)$ est la *différentielle totale* de $z$. Je dis que cette différentielle totale est égale à la somme des différentielles partielles. Dans la figure, elle est représentée par $m''\mathrm{M}'$ et je dis que $m''\mathrm{M}' = n\mathrm{N} + n'\mathrm{N}'$.

Dans $f'_y$ ou $f'_y(x, y)$ remplaçons $x$ par $x+dx$ et appliquons le théorème du n° 135, on aura

$$f'_y(x+dx, y) = f'_y(x, y) + \varepsilon$$

ou

$$f'_y(x+dx, y)\, dy = f'_y dy + \varepsilon\, dy.$$

Mais le premier membre est la différentielle partielle par rapport à $y$ de la fonction $f(x+dx, y)$, dans laquelle $x+dx$ est constant; c'est-à-dire c'est la différentielle de la fonction, quand, partant du point N on fait varier $y$ seul. D'après le second membre, cette différentielle ne

diffère de $f'_y dy$ ou $n'N'$ que d'un infiniment petit du second ordre; donc, si par le point N on mène une parallèle à l'axe des $x$, on aura $n''M' = n'N'$.

D'après cette même construction, on a $m''n'' = nN$; par conséquent $m''M' = n'N' + nN$, ce qu'il fallait démontrer.

139. Cas d'une fonction d'un nombre quelconque de variables. — *La différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables indépendantes est égale à la somme des différentielles partielles de la fonction.*

Si $dz$ représente la différentielle totale et si $\frac{dz}{dx}dx$, $\frac{dz}{dy}dy$, $\frac{dz}{dt}dt$..... représentent les différentielles partielles, on a

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dt}dt.....$$

Nous ne supposerons que deux variables indépendantes, car la démonstration que nous allons donner est facile à généraliser. La démonstration que nous avons donnée précédemment avait pour but de donner une représentation géométrique aux différentielles et de faire mieux comprendre la portée du théorème.

Par définition

$$dz = f(x+dx, y+dy) - f(x, y).$$

On a identiquement

$$dz = \frac{f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy)}{dx}dx + \frac{f(x, y+dy) - f(x, y)}{dy}dy$$

la première fraction représente la différentielle de $f(x, y+dy)$ quand on suppose $y+dy$ constant et qu'on fait varier $x$. On peut donc la remplacer par $f'_x(x, y+dy)\,dx$. Mais $f'_x(x, y+dy)$ ne diffère de $f'_x(x, y)$ que d'un infiniment petit du premier ordre, et par conséquent on peut dire que la première fraction est égale à $f'_x dx$.

La seconde n'est évidemment que $f'_y dy$. On a donc

$$dz = f'_x dx + f'_y dy,$$

ou

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

Les coefficients des différentielles des variables s'appellent les *coefficients différentiels*; on les représente souvent par les lettres X, Y,..... et on écrit

$$dz = Xdx + Ydy.$$

**De la différentielle exacte d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.**

140. Toute différentielle

$$du = X dx + Y dy$$

qui a la forme d'une différentielle totale n'est pas toujours une différentielle exacte d'une fonction des variables $x$ et $y$. Ainsi

$$du = dx - \frac{y}{x} dy$$

n'est pas une différentielle exacte d'une fonction de $x$ et de $y$; mais $x du = x dx - y dy$ est la différentielle exacte de la fonction

$$z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + c).$$

Il a suffi de multiplier $du$ par $x$ pour qu'il en soit ainsi. Si l'on multiplie par $\frac{1}{x^2+y^2}$ la différentielle $du = y dx - x dy$, on aura

$$\frac{du}{x^2+y^2} = \frac{y dx - x dy}{x^2+y^2}$$

qui est la différentielle exacte de $Z = \text{arc tang } \frac{x}{y} + c$.

141. Cherchons la condition que doivent remplir les coefficients X et Y pour que $du$ soit une différentielle exacte d'une fonction des variables $x$ et $y$.

Soit $z = f(x, y)$ une fonction de ces deux variables, on a $\frac{dz}{dx} = f'_x$ et $\frac{dz}{dy} = f'_y$; je dis que $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$, c'est-à-dire que $\frac{df'_x}{dy} = \frac{df'_y}{dx}$ (nous représenterons cette *dérivée seconde* par $f''_{xy}$).

Donnons à $x$ un accroissement infiniment petit $h$, on peut écrire (135)

$$f(x+h, y) - f(x, y) = \frac{dz}{dx} h.$$

Donnons ensuite à $y$ un accroissement infiniment petit $k$ et observons que $\frac{dz}{dx}$ devient égal à $\frac{dz}{dx} + \frac{d\frac{dz}{dx}}{dy} k$, car l'accroissement de $\frac{dz}{dx}$ est égal à

sa dérivée par rapport à $y$ multipliée par la variation infiniment petite de $y$ (135). On a donc

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) = \left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\frac{dz}{dx}}{dy} k\right) h.$$

De cette équation retranchons la première et divisons par $hk$, nous aurons

$$\frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+h) - f(x+h, y) + f(x, y)}{hk} = \frac{d\frac{dz}{dx}}{dy}.$$

Si l'on avait fait varier d'abord $y$ puis $x$, on aurait trouvé pour second membre $\frac{d\frac{dz}{dy}}{dx}$ et le premier membre n'aurait pas changé. Il en résulte que les deux dérivées partielles du second ordre sont égales ou, ce qui revient au même, que le résultat final de plusieurs différentiations est indépendant de l'ordre de ces différentiations. Je dis plusieurs, bien que nous n'ayons parlé que de deux différentiations et que de deux variables, parce qu'il est facile de généraliser la démonstration précédente. Si nous ne considérons que deux variables, c'est que nous n'avons pas eu à nous préoccuper de fonctions de plus de deux variables.

Revenons à la différentielle $X dx + Y dy$; pour qu'elle soit différentielle exacte d'une fonction des variables $x$ et $y$, il faut donc que

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx},$$

puisque X doit représenter $f'_x$ et Y, $f'_y$.

142. Ajoutons que cette condition est suffisante, c'est-à-dire qu'il sera toujours possible de trouver l'intégrale d'une différentielle qui remplira cette condition.

X représentant la dérivée de la fonction quand on y suppose $y$ constant, si l'on intègre $X dx$, en supposant $y$ constant, on aura une certaine fonction en $x$ et en $y$, $f_1(x, y)$, à laquelle il faudra ajouter comme constante une fonction arbitraire de $y$, $\varphi(y)$, et on aura

$$f(x, y) = f_1(x, y) + \varphi(y).$$

Si l'on peut déterminer $\varphi(y)$, notre proposition sera établie. Or, on doit avoir $f'_y = f'_{1y} + \varphi'(y)$, mais $f'_y = Y$; on a donc

$$Y = f'_{1y} + \varphi'(y)$$

ou

$$\varphi'(y) = Y - f'_{1y}.$$

Le premier membre ne contenant pas $x$, le second ne doit pas le contenir et on doit avoir

$$\frac{d(Y - f'_{1y})}{dx} = 0$$

ou

$$\frac{dY}{dx} - f''_{1yx} = 0;$$

$Y = f'_y$ et, par conséquent, $\frac{dY}{dx} = f''_{yx}$; de plus, $f''_{1yx} = f''_{1xy}$ (141) et $f'_{1x} = X$; par conséquent $f''_{1yx} = f''_{xy}$; on retombe donc sur la condition nécessaire. Il en résulte que $Y - f'_{1y}$ est indépendante de $x$ et que son intégrale est la constante $\varphi(y)$ qu'il faut ajouter à $\int X dx$.

Comme exemple, proposons-nous d'intégrer la différentielle totale

$$dz = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

$$X = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}.$$

$dz$ est donc une différentielle exacte. Cherchons une intégrale

$$z = \int \frac{ydx}{x^2 + y^2} + \varphi(y).$$

$$z = \int \frac{\frac{dx}{y}}{\frac{x^2}{y^2} + 1} + \varphi(y) = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + \varphi(y)$$

$$\varphi'(y) = Y - f'_{1y} = \frac{-x}{x^2 + y^2} - \frac{d}{dy} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} = 0$$

$$\varphi(y) = c,$$

et, par conséquent,

$$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + c.$$

On aurait pu trouver ce résultat d'une manière plus rapide, en remarquant que $\frac{ydx - xdy}{y^2}$ est la différentielle totale de $\frac{x}{y}$.

Alors, on aurait pu écrire

$$dz = \frac{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{d\frac{x}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + c.$$

**Du facteur par lequel il faut multiplier une différentielle pour qu'elle devienne différentielle exacte.**

143. — L'équation $X\,dx + Y\,dy = 0$ admet toujours une intégrale, que l'on puisse ou non séparer les variables. En effet, partant d'une valeur de $x$ et d'une valeur de $y$ arbitraire, on peut déterminer le rapport $\frac{dy}{dx}$ correspondant, et puis, de proche en proche, calculer les variations de $y$ correspondantes à celles de $x$; soit $u = c$, l'intégrale de cette équation, quand on a résolu cette intégrale par rapport à la constante qu'elle renferme. De cette dernière équation $u = c$, on tire :

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}.$$

On a donc :

$$-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}} = \frac{X}{Y}.$$

Cette équation doit être identique; autrement, elle établirait une relation entre $x$ et $y$, où il n'y aurait pas de constante arbitraire, tandis que d'après l'équation $u = c$, $y$ dépend de $x$ et de $c$. On peut donc écrire

$$\frac{\frac{du}{dx}}{X} = \frac{\frac{du}{dy}}{Y} = v,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{du}{dx} = X\,v, \quad \frac{du}{dy} = Y v$$

et

$$du = v(X\,dx + Y\,dy).$$

Il y a donc toujours un facteur $v$, fonction de $x$ et de $y$, propre à rendre différentielle exacte le premier membre d'une équation différentielle.

La détermination de ce facteur n'est pas une opération facile en général, mais il importe de constater que ce facteur existe. Ajoutons enfin qu'il y a une infinité de facteurs qui peuvent jouer le même rôle. Ainsi :

$$v\varphi(u)(X\,dx+Y\,dy)=\varphi(u)\,du=d\int\varphi(u)\,du.$$

Le premier membre de l'équation sera donc une différentielle exacte, puisqu'une expression telle que $\varphi(u)\,du$ a une intégrale, et les facteurs propres à rendre différentielle exacte le premier membre d'une équation différentielle sont de la forme

$$v\,\varphi(u).$$

FIN

Paris. — Imp. J. Dejey et Cie, 18, rue de la Perle.